NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 517-520

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__517_0>

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne. — *A propos de la spirale tractrice.* — Ainsi que M. Balitrand en renouvelle la remarque dans la Note récente qu'il lui a consacrée (*N. A.*, 1915, p. 348), une telle courbe est un cas particulier de la *tractrice circulaire*, courbe que décrit un point M tiré à l'extrémité d'un segment NM de longueur constante par un point N qui décrit un cercle. Ce cas particulier est celui où le segment MN est égal au rayon de ce cercle.

La construction du centre de courbure d'une telle courbe, et celle du centre de courbure de sa développée résultent d'un théorème applicable à une tractrice *absolument quelconque*, que j'ai rencontré naguère à l'occasion d'une *théorie géométrique du virage à bicyclette* (*Génie civil*, t. XXIX, 1896, p. 140), théorème que, après l'avoir légèrement modifié, j'ai, depuis longtemps, introduit dans mon Cours de l'École des Ponts et Chaussées et, plus récemment, dans mon Cours de l'École Polytechnique (*voir* notamment les *Feuilles autographiées de la deuxième Division* pour la session 1912-1913, p. 187).

Ce théorème peut s'énoncer ainsi : *Si la courbe* (M) *est tractrice de la courbe* (N) *quelconque :* 1° *le centre de courbure* C *de la courbe* (M) *se trouve à l'intersection de sa normale avec celle de la courbe* (N); 2° *le centre de courbure* C′ *de la développée de* (M) *est à l'intersection de la normale à cette développée avec la droite qui joint le* *centre de courbure* O *de la courbe* (N) *au point* P *où la perpendiculaire élevée en* C *à* NC *rencontre* MN.

Les notations ici employées étant celles mêmes de la Note de M. Balitrand, ce double énoncé fournit immédiatement, pour la spirale tractrice envisagée par cet auteur, la construction des centres de courbure C et C′. On remarquera que ce point C′ est le symétrique par rapport à C du point C_1 obtenu par M. Balitrand (*loc. cit.*, p. 351). Il est vrai que l'auteur dit que « CC_1 est égal au rayon de courbure » sans dire que C_1 soit le centre de courbure; mais comme, en général, quand on construit un rayon de courbure, on le suppose mis en place, quelques lecteurs auraient pu s'y tromper.

J'ajouterai que la démonstration du théorème général ci-dessus est des plus simples et élémentaires.

Il est très simple aussi d'obtenir la détermination du centre de courbure de la roulette (O) engendrée par le pôle O de la spirale tractrice roulant sur une droite, ainsi que celle du centre de courbure de la développée de cette roulette, *sans aucun calcul.*

Conservant les notations de M. Balitrand, nous appelons OM et OT la normale et la tangente en O à cette roulette, qui déterminent sur la base le segment de longueur constante $MT = 2a$, dont le milieu est N, γ le centre de courbure de (O), situé sur OM, entre O et M. Si les perpendiculaires élevées en T et en M à TM coupent, respectivement en t et en m, l'une la normale OM à la roulette, l'autre la normale à sa développée (perpendiculaire en γ à $O\gamma$), on a, en représentant par $d(\mathrm{M})$, $d(\mathrm{T})$, $d(\mathrm{O})$ les arcs infiniment petits décrits simultanément par les trois points,

$$\frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{O})} = \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{O}\gamma}, \qquad \frac{d(\mathrm{T})}{d(\mathrm{O})} = \frac{\mathrm{T}t}{\mathrm{O}\gamma}.$$

Et comme, par hypothèse, $d(M) = d(T)$, on en déduit que $Mm = Tt$. Les triangles rectangles TOt et $M\gamma m$ sont dès lors égaux et $Ot = \gamma M$. Autrement dit : *le centre de courbure* γ *est symétrique du point* O *par rapport au milieu* I *de* Mt (*point situé sur la perpendiculaire en* N *à la base*). C'est le résultat obtenu par M. Balitrand.

Il suit immédiatement de là, en vertu d'un théorème bien connu de Mannheim, que *la normale à la courbe que décrit le point* I *passe par le milieu du rayon de courbure de la développée en* γ. Tout revient donc à trouver cette normale, ou, ce qui revient au même, *la tangente au lieu du point* I. Or, le segment IM, qui touche son enveloppe en γ, ayant sur la base une projection MN de grandeur constante, un théorème que j'ai donné jadis (*N. A.*, 1886, p. 89) montre que *cette tangente coupe* MN *en un point* U *symétrique*, *par rapport au milieu de* MN, *du pied* G *de la perpendiculaire abaissée de* γ *sur* MN.

Pour montrer l'identité de cette construction avec celle qu'a obtenue M. Balitrand, il suffit de faire voir que, si la perpendiculaire élevée en I à IU coupe MN en L, le pied K de la perpendiculaire abaissée de L sur IO est au milieu de ce segment, ce qui n'offre aucune difficulté.

M. d'Ocagne. — *Au sujet d'une Note récente de M. Goormaghtigh* (*N. A.*, 1915, p. 393). — Le théorème donné, au début de cette Note, comme fondamental (p. 396) et obtenu à la suite de calculs assez laborieux, est, en quelque sorte, intuitif, comme je l'ai fait remarquer il y a longtemps (*N. A.*, 1886, p. 88). Il entraîne immédiatement la construction du centre de courbure établie à la suite (p. 397), en vertu d'un théorème bien connu de Mannheim, identique d'ailleurs à celui qui fait l'objet du renvoi (2) de cette même page 397 (*voir* MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique*, 2^e édition, p. 172, avec la Remarque de la page 173). L'application à l'hyperbole, qui termine le n° 6 (p. 402), a d'ailleurs été explicitement formulée par Mannheim (*Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 21).

La relation entre deux courbes, désignée dans la Note en question par les termes d'*hyperbolisme* et *antihyperbolisme*, se confond avec la *transformation par l'abscisse* (*inverse* dans le premier cas, *directe* dans le second) dont l'idée a été émise par Segner en 1761 et qui se prête à d'importantes applications en calcul graphique comme on peut le voir dans mon Ouvrage *Calcul graphique et Nomographie* (Paris; Doin, 1908; 2^e édition, 1914). Le mode de liaison entre les tangentes aux deux courbes, que je donne à cet endroit (p. 67), me semble plus simple que ceux indiqués par M. Goormaghtigh (p. 405 et 409). Il consiste, si l'on se reporte à la figure 5 (p. 403) de la Note de cet auteur, en ce que *le point de rencontre des tangentes* MS *et* LS' *se trouve sur la droite* mT.