NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. AURIC

Note sur la brocardienne

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 355-362

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__355_0>

[K¹5c]

NOTE SUR LA BROCARDIENNE;

Par M. A. AURIC.

Soient un triangle de référence $A_1A_2A_3$ et un point M dont les coordonnées barycentriques sont

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3;$$

nous appellerons *brocardienne* B du point M la conique ayant pour équation

$$\Sigma m_2 m_3 x_1^2 - m_1^2 x_2 x_3 = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_2 x_3 & m_3 x_1 & m_1 x_2 \\ m_3 x_2 & m_1 x_3 & m_2 x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est symétrique en m_i et x_i; on sait d'ailleurs que la brocardienne passe par le point M, par les points brocardiens

$$\frac{1}{m_2}, \quad \frac{1}{m_3}, \quad \frac{1}{m_1}; \qquad \frac{1}{m_3}, \quad \frac{1}{m_1}, \quad \frac{1}{m_2};$$

par les sommets des deux triangles brocardiens

$$m_1, \quad m_3, \quad m_2; \qquad m_3, \quad m_2, \quad m_1; \qquad m_2, \quad m_1, \quad m_3;$$

$$m_2 + m_3 - m_1, \quad m_2, \quad m_3; \qquad m_1, \quad m_3 + m_1 - m_2, \quad m_3;$$

$$m_1, \quad m_2, \quad m_1 + m_2 - m_3;$$

enfin par le centre de la conique circonscrite

$$\Sigma m_1 x_2 x_3 = 0,$$

soit

$$m_1(m_2+m_3-m_1),\quad m_2(m_3+m_1-m_2),$$
$$m_3(m_1+m_2-m_3).$$

On pourrait trouver aisément d'autres points réels à coordonnées simples situés sur B, par exemple

$$\frac{m_2^3+m_3^3}{m_2 m_3}-m_1,\quad m_3,\quad m_2;\qquad m_3,\quad \frac{m_3^3+m_1^3}{m_3 m_1}-m_2,\quad m_1;$$
$$m_2,\quad m_1,\quad \frac{m_1^3+m_2^3}{m_1 m_2}-m_3;$$

mais les propriétés caractéristiques de la brocardienne paraissent résulter surtout de la considération de points imaginaires.

j, j^2 étant les racines cubiques de l'unité, introduisons les points

$$M_1=(m_1,\ m_2 j,\ m_3 j^2),\qquad M_2=(m_1,\ m_2 j^2,\ m_3 j),$$
$$G=(1,\ 1,\ 1),\qquad G_1=(1,\ j,\ j^2),\qquad G_2=(1,\ j^2,\ j).$$

On démontre facilement que la brocardienne est circonscrite à MM_1M_2 (¹) et que son discriminant est constitué par les côtés des triangles $A_1A_2A_3$ et GG_1G_2; en d'autres termes, lorsque le point représentatif M se trouve sur le périmètre d'un de ces deux triangles, la brocardienne se décompose en deux droites.

Pour $m_1=0$, B s'écrit

$$x_1(m_2 m_3 x_1-m_3^2 x_2-m_2^2 x_3)=0;$$

de même B s'écrit

$$(x_1+x_2+x_3)(m_2 m_3 x_1+m_3 m_1 x_2+m_1 m_2 x_3)$$
$$-(m_1+m_2+m_3)(m_1 x_2 x_3+m_2 x_3 x_1+m_3 x_1 x_2)=0$$

(¹) *Voir* notre Note *Sur les triangles hexahomologiques* (*C. R. Acad. Sc.*, 26 juillet 1915).

ou

$$(x_1+jx_2+j^2x_3)(m_2m_3x_1+j^2m_3m_1x_2+jm_1m_2x_3)$$
$$-(m_1+j^2m_2+jm_3)(m_1x_2x_3+jm_2x_3x_1+j^2m_3x_1x_2)=0,$$

ce qui donne la décomposition de B pour

$$m_1+m_2+m_3=0$$

et pour

$$m_1+j^2m_2+jm_3=0.$$

La première formule montre que B est homothétique à

$$\Sigma m_1x_2x_3=0$$

dont le centre est précisément sur B.

Pour que B soit un cercle il faut que

$$m_1=a_1^2, \qquad m_2=a_2^2, \qquad m_3=a_3^2.$$

M est donc dans ce cas le point de Lemoine.

La considération des points M_1, M_2 fournit immédiatement deux nouveaux triangles inscrits dans la brocardienne et dont les sommets sont

$$\begin{array}{lll} m_2+m_3j-m_1j^2, & m_2j, & m_3; \\ m_1, & m_3+m_1j-m_2j^2, & m_3j; \\ m_1j, & m_2, & m_1+m_2j-m_3j^2; \\ m_2+m_3j^2-m_1j, & m_2j^2, & m_3; \\ m_1, & m_3+m_1j^2-m_2j, & m_3j^2; \\ m_1j^2, & m_2, & m_1+m_2j^2-m_3j. \end{array}$$

Nous appellerons *brocardienne générale* la conique ayant pour équation

$$\Sigma\lambda m_2m_3x_1^2+2m_1^2x_2x_3=0.$$

Son discriminant est

$$\Delta=-m_1m_2m_3[\lambda(m_1^3+m_2^3+m_3^3)+(\lambda^3+2)m_1m_2m_3].$$

Pour que la cubique figurant entre crochets se réduise à trois droites il faut (indépendamment des valeurs $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$ qui donnent $m_1 m_2 m_3 = 0$) que $\frac{\lambda^3 + 2}{\lambda}$ soit égal à 3 ou à $3j$ ou à $3j^2$.

On a donc, pour déterminer λ, trois équations qui ont chacune : une racine simple

$$\lambda = -2, \qquad -2j^2, \qquad -2j,$$

et une racine double

$$\lambda = 1, \qquad j^2, \qquad j.$$

C'est la racine simple qui conduit à la brocardienne ordinaire réelle

$$\Sigma m_2 m_3 x_1^2 - m_1^2 x_2 x_3 = 0$$

et à ses deux associées imaginaires

$$(B_1) \qquad j\,\Sigma m_2 m_3 x_1^2 - \Sigma m_1^2 x_2 x_3 = 0,$$
$$(B_2) \qquad j^2 \Sigma m_2 m_3 x_1^2 - \Sigma m_1^2 x_2 x_3 = 0.$$

Si nous considérons les points

$$\begin{array}{ll} J_1^1 = (j, 1, 1), & J_1^2 = (j^2, 1, 1), \\ J_2^1 = (1, j, 1). & J_2^2 = (1, j^2, 1), \\ J_3^1 = (1, 1, j), & J_3^2 = (1, 1, j^2), \\ M_1^1 = (jm_1, m_2, m_3), & M_1^2 = (j^2 m_1, m_2, m_3), \\ M_2^1 = (m_1, jm_2, m_3), & M_2^2 = (m_1, j^2 m_2, m_3), \\ M_3^1 = (m_1, m_2, jm_3), & M_3^2 = (m_1. m_2, j^2 m_3), \end{array}$$

les brocardiennes B_1 et B_2 sont respectivement circonscrites à $M_1^1 M_2^1 M_3^1$ et à $M_1^2 M_2^2 M_3^2$ et ont pour discriminants les cubiques formées par les côtés des triangles

$$J_1^1 J_2^1 J_3^1 \quad \text{et} \quad J_1^2 J_2^2 J_3^2$$

indépendamment du triangle de référence; nous les appellerons *brocardiennes circonscrites*.

A la racine double correspondent des brocardiennes qui ont mêmes discriminants que les précédentes, mais qui sont conjuguées par rapport aux triangles

$$\mathbf{M M_1 M_2}, \quad \mathbf{M_1^1 M_2^1 M_3^1}, \quad \mathbf{M_1^2 M_2^2 M_3^2}\ (^1);$$

nous les appellerons *brocardiennes conjuguées*. Leur équation est

$$\alpha \Sigma m_2 m_3 x_1^2 + 2 \Sigma m_1^2 x_2 x_3 = 0 \qquad (\alpha = 1, j, j^2)$$

et il est facile d'établir leurs nombreuses propriétés (²).

Si l'on pose

$$x_1 = m_1 y_1, \qquad x_2 = m_2 y_2, \qquad x_3 = m_3 y_3,$$

la brocardienne générale devient

$$\Sigma m_1(\lambda y_1^2 + 2 y_2 y_3) = 0,$$

qui représente la conique d'un réseau linéaire de trois coniques.

Pour $\lambda = -2$, elle est circonscrite à GG_1G_2 et, pour $\lambda = 1$, elle est conjuguée à ce même triangle comme on pouvait s'y attendre.

Posant

$$y_1 = m_1 z_1, \qquad y_2 = m_2 z_2, \qquad y_3 = m_3 z_3,$$

il vient

$$\frac{\lambda}{2 m_1 m_2 m_3} \Sigma m_1^3 z_1^2 + \Sigma z_2 z_3 = 0.$$

Cette équation représente une conique d'un faisceau linéaire de deux coniques dont l'une est fixe et dont l'autre ne dépend que de m_1^3, m_2^3, m_3^3; c'est ce qui explique l'introduction des racines cubiques de

---

(¹) Les triangles $A_1A_2A_3$, MM_1M_2, $M'_1M'_2M'_3$ et $M_1^2M_2^2M_3^2$ sont hexahomologiques entre eux deux à deux (voir *C. R. Acad. Sc.*, t. CLXI, p. 275).

(²) *Voir*, dans les *Exercices de Kœler*, l'étude d'un réseau remarquable de trois coniques.

l'unité dans les coordonnées des points considérés précédemment.

Soient deux points

$$P = (p_1, p_2, p_3), \qquad Q = (q_1, q_2, q_3),$$

nous appellerons *droite brocardienne* de P, Q la droite

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_2 q_3 & p_3 q_1 & p_1 q_2 \\ p_3 q_2 & p_1 q_3 & p_2 q_1 \end{vmatrix} = \Sigma x_1 (p_2 p_3 q_1^2 - p_1^2 q_2 q_3) = 0.$$

Cette droite passe par les points S_1, S_2

$$p_2 q_3, \quad p_3 q_1, \quad p_1 q_2; \qquad p_3 q_2, \quad p_1 q_3, \quad p_2 q_1,$$

que nous appellerons *brocardiens généraux* de P et de Q et par les points

$$(T_1) \qquad p_2 q_3 + p_3 q_2, \quad p_3 q_1 + p_1 q_3, \quad p_1 q_2 + p_2 q_1,$$
$$(T_2) \qquad p_2 q_3 - p_3 q_2, \quad p_3 q_1 - p_1 q_3, \quad p_1 q_2 - p_2 q_1,$$

qui sont conjugués harmoniques par rapport aux précédents et qui jouent un rôle important dans la géométrie du triangle ([1]).

Pour que le point

$$x_1 = p_1^2 m_2 m_3 - p_2 p_3 m_1^2, \qquad x_2 = p_2^2 m_3 m_1 - p_3 p_1 m_2^2,$$
$$x_3 = p_3^2 m_1 m_2 - p_1 p_2 m_3^2,$$

situé sur la droite brocardienne de P et de M, appartienne à la brocardienne ordinaire B, il faut que le point P se trouve soit sur la droite $G_1 G_2$ (ou droite de l'infini), soit sur le périmètre du triangle MM_1M_2.

([1]) Dans notre Note sur la lemoinienne, le point de rencontre de deux axes d'homologie $\Delta_{12}\Delta_{13}$ est un point T_2 et le pôle de l'axe associé Δ_{23} par rapport à L est un point T_1.

Nous avons ainsi une transformation de droite en brocardienne B.

En particulier, lorsque P est en G_1 ou G_2, nous obtenons deux nouveaux points remarquables de la brocardienne B :

$$m_2 m_3 - m_1^2, \quad j\,(m_3 m_1 - m_2^2), \quad j^2(m_1 m_2 - m_3^2);$$
$$m_2 m_3 - m_1^2, \quad j^2(m_3 m_1 - m_2^2), \quad j\,(m_1 m_2 - m_3^2).$$

L'équation tangentielle de la brocardienne générale est

$$\Sigma(m_1^4 u_1^2 - 2 m_2^2 m_3^2 u_2 u_3) \\ - \lambda m_1 m_2 m_3 \Sigma\,[m_1(\lambda u_1^2 - 2 u_2 u_3)] = 0.$$

Les coordonnées du centre de la brocardienne B sont [1]

$$\frac{m_1}{m_2 - m_3} + K, \quad \frac{m_2}{m_3 - m_1} + K, \quad \frac{m_3}{m_1 - m_2} + K,$$

avec

$$K = \frac{3\, m_1 m_2 m_3}{(m_1 - m_2)(m_2 - m_3)(m_3 - m_1)};$$

celles du centre de la brocardienne conjuguée réelle sont

$$\frac{m_1}{m_2 - m_3}, \quad \frac{m_2}{m_3 - m_1}, \quad \frac{m_3}{m_1 - m_2};$$

ce point se trouve à l'intersection des deux coniques circonscrites

$$\sum \frac{m_1}{x_1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{m_1^2}{x_1} = 0;$$

il en résulte que les centres des deux brocardiennes

---

[1] Ces coordonnées s'écrivent également

$$m_1^2(m_2 + m_3 - m_1) + 2 m_1 m_2 m_3,$$
$$m_2^2(m_3 + m_1 - m_2) + 2 m_1 m_2 m_3,$$
$$m_3^2(m_1 + m_2 - m_3) + 2 m_1 m_2 m_3.$$

sont collinéaires avec G et avec le point

$$m_1^2(m_2+m_3-m_1),\qquad m_2^2(m_3+m_1-m_2),$$
$$m_3^2(m_1+m_2-m_3).$$

Dans la brocardienne générale la coordonnée ξ_1 du centre est égale à

$$m_1^2(m_2^2+m_3^2-m_1^2)+\lambda m_1 m_2 m_3(\lambda m_1-m_2-m_3);$$

il en résulte que ce point est collinéaire avec le centre de la conique circonscrite

$$\Sigma m_1^2 x_2 x_3 = 0,$$

et le point

$$\lambda m_1-m_2-m_3,\qquad \lambda m_2-m_3-m_1,\qquad \lambda m_3-m_1-m_2.$$

Pour des valeurs de λ égales et de signe contraire, les centres des brocardiennes correspondantes sont collinéaires avec le point

$$m_2+m_3,\qquad m_3+m_1,\qquad m_1+m_2.$$