Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 31-49

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__31_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère une verticale* ascendante Oy *et une horizontale* Ox *qui la rencontre; soit* M *un point matériel de masse* m, *de coordonnées* (x, y), *situé dans le plan* xOy. *Ce point est* pesant; *il est en outre* repoussé *par chaque élément* P *de la verticale* Oy *avec une force qui est* proportionnelle *à la masse* m, *à la masse de l'élément* P, *est* inversement proportionnelle à la 4e puissance de la distance PM.

On demande :

1° *Quelles sont les projections sur* Ox *et sur* Oy *de la résultante des forces appliquées au point* M ?

2° *Écrire les équations du mouvement du point* M *sous l'action de ces forces, et intégrer ces équations sachant que la vitesse initiale du point* M *est contenue dans le plan* xOy.

3° *Étudier sommairement les divers mouvements possibles, en particulier tracer approximativement les diverses formes que peut affecter la trajectoire suivant les conditions initiales. On montrera que cette trajectoire ne peut jamais rencontrer la verticale* Oy.

4° *Étudier plus particulièrement le mouvement lorsque la vitesse initiale du point* M *est verticale; on distinguera le cas où elle est dirigée vers le haut et le cas où elle est dirigée vers le bas; on précisera dans ces deux cas la forme de la trajectoire en étudiant sa concavité.*

5° *On peut toujours supposer qu'on a choisi* Ox *passant par la position initiale du point* M. *Dans le cas où la vitesse initiale est* verticale ascendante, *la trajectoire coupe alors* Ox *en un deuxième point.*

Calculer l'aire limitée par Ox, *entre les deux points, et la trajectoire du point* M *en supposant*

$$v_0 = g, \qquad x_0 = 2\,\mathrm{K} = 1.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer les racines de l'équation*

$$3x^4 + 22x^3 + 63x^2 + 34x - 24 = 0$$

avec une erreur inférieure ou au plus égale à $\frac{1}{10^4}$.

(Juillet 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y + \frac{1}{1+x^3} = 0.$$

Former l'équation de la courbe intégrale qui passe par l'origine des coordonnées, et construire cette courbe pour les valeurs de x *comprises entre* 0 *et* 1.

Former les quatre premiers termes (c'est-à-dire les termes de degré 0, 1, 2, 3) *du développement en série de Mac-Laurin pour l'intégrale précédente, et en déduire la forme de la courbe dans le voisinage de l'origine des coordonnées.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près la racine positive de l'équation*

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18 = 0.$$

1° *Centre de gravité de la portion de l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

situé au-dessus du plan $z = 0$. (Novembre 1913.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Composition des mouvements vibratoires rectilignes de même période parallèles. Interférence.*

II. Problèmes. — 1° *Trouver le lieu géométrique du milieu d'un segment de longueur donnée dont les extrémités se déplacent sur un cercle de rayon r et sur un diamètre fixe de ce cercle.*

Indiquer quelle doit être la longueur donnée pour que le lieu soit la courbe (Γ) *représentée par l'équation*

$$x^4 + 10x^2y^2 + 9y^4 - 4r^2x^2 = 0,$$

le diamètre fixe étant pris pour axe des abscisses et le diamètre perpendiculaire pour axe des ordonnées.

Construire la courbe (Γ), *calculer l'aire de la région du plan qu'elle limite.*

2° *Étant donnés, dans un plan, un pôle* O *et un axe polaire* Ox, *trouver toutes les courbes telles que l'aire du triangle curviligne limité par l'axe polaire, un arc de la courbe et un rayon vecteur quelconque soit proportionnelle à la longueur de l'arc de la courbe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Géométrie analytique. — *x variant de* 0 *à* π, *on considère la courbe représentée par l'équation*

$$y = e^{-x\sqrt{2}} \sin x.$$

1° *Calculer le maximum de y.*

Soit A *le point correspondant de la courbe. Calculer le rayon de courbure en ce point.*

2° *Soit* B *le point d'abscisse* π. *Calculer en degrés et minutes l'angle que fait en ce point la tangente à la courbe avec l'axe des x.*

3° *Calculer l'aire limitée par l'arc* AB, *la verticale du point* A *et l'axe* Ox.

4° *Déterminer les coordonnées du point d'inflexion.*

II. Mécanique. — *Pendule composé dont l'axe de suspension n'est pas horizontal. Un corps solide est pesant et* *mobile autour d'un axe qui fait avec le plan horizontal l'angle* $i\left(0 < i < \frac{\pi}{2}\right)$. *Donner l'équation différentielle du mouvement : on déterminera la position du solide par l'angle* θ, *compté algébriquement, de la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur l'axe de rotation avec celle de ses positions où elle a la plus grande pente et est dirigée vers le bas. Positions d'équilibre du solide. Montrer qu'il existe un pendule simple oscillant dans un plan vertical et synchrone du pendule composé considéré. Comment change la durée des oscillations infiniment petites d'un pendule composé, si on le fait osciller successivement autour du même axe (par rapport à lui) placé d'abord horizontalement, puis faisant l'angle* i *avec le plan horizontal?* (Juillet 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Problèmes. — 1° *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *construire les projections sur les plans de coordonnées de la courbe* (Γ) *représentée par les équations*

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = \frac{K}{2}\left(e^{\frac{r\varphi}{K}} + e^{-\frac{r\varphi}{K}}\right),$$

où r, K, φ *désignent deux longueurs données et un angle variable.*

Rectifier la courbe (Γ).

Montrer que les tangentes à (Γ) *touchent une sphère de centre* O.

2° *Dans un plan rapporté à un pôle* O *et à un axe polaire* Ox, *construire la courbe* (C) *représentée par l'équation*

$$\rho = a\, e^{\tan\omega},$$

ω *et* ρ *désignant l'angle polaire et le rayon vecteur d'un point,* a *étant une longueur donnée.*

Former et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de la famille de courbes engendrée par (C) *quand* a *varie.*

II. Question de cours. — *Définir le mouvement hélicoïdal uniforme d'un corps solide par application de la composition des mouvements.*

Épreuve pratique. — I. *Un point matériel* M, *de masse* m, *est soumis à l'action de la pesanteur, qui lui imprime l'accélération* g, *et d'autre part à une attraction issue d'un point fixe* O, *constante et égale en valeur absolue à* mg.

Démontrer que la résultante de ces deux forces dérive d'une fonction de forces. Définir géométriquement les surfaces de niveau.

Le point M *est soumis aux deux forces précédentes et assujetti à se mouvoir sans frottement sur une droite horizontale* Ox *passant par le point* O. *On le place en un certain point* M_0 *de* Ox, *et on le lance avec une certaine vitesse, vers le point* O *ou dans la direction opposée. Quel est le mouvement du point* M *jusqu'à ce qu'il atteigne le point* O? *Calculer la réaction de la droite* Ox.

II. *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$$

(Novembre 1913.)

Lyon.

Epreuve écrite. — *On donne trois axes rectangulaires et la surface* (P) *qui, rapportée à ces axes, a pour équation*

$$z = x^2 + y^2.$$

On porte sur Ox *une longueur* OA *égale à l'unité et l'on considère le cylindre* (C) *dont les génératrices sont parallèles à* Oz *et dont la base, dans le plan* xOy, *est le cercle de diamètre* OA :

1° *Montrer que les surfaces* (P) *et* (C) *se coupent suivant une ellipse dont on calculera la surface.*

2° *Trouver le volume* V *du solide limité par le cylindre* (C), *le plan* $z = 0$ *et la surface* (P).

3° *Calculer la portion de la surface du cylindre* (C) *limitée par le plan* $z = 0$ *et la surface* (P).

4° *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right) dx - 2 y^2 dy$$

prise le long du cercle de base du cylindre (C). *Pour quelle raison la valeur absolue de cette intégrale est-elle égale au volume* V *demandé dans* 2°?

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^2(1+x^2)^2 y'' = 2.$$

2° *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y = \mathrm{L}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) + 3x \operatorname{arc\,tang} x.$$

3° *Asymptotes de cette courbe.*

4° *Calculer des valeurs approchées à* $\frac{1}{10}$ *près des abscisses des points où cette courbe coupe* Ox.

(Juillet 1913.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. 1° *Intégrer l'équation*

$$x^2 y'' - y'^2 = 0.$$

2° *Trouver toutes les courbes intégrales telles que, pour* $x = 1$, *on ait* $y' = 1$ *ou* $y' = -1$.

3° *Forme de ces courbes.*

4° *Soit* $y = f(x)$ *l'équation de la courbe intégrale qui passe par l'origine et qui est tangente en ce point à l'axe des* x. *Déterminer une constante* a *telle que*

$$\frac{f(x) - ax^3}{x^3}$$

ait une limite finie lorsque x *tend vers zéro. Valeur de cette limite.*

II. *Discuter l'équation*

$$2x + \mathrm{L}\,|2x - 1| = 0$$

et calculer ses racines à $\frac{1}{10}$ *près.*

Mécanique. — *Comment parvient-on à énoncer le principe de la conservation de l'énergie. Systèmes auxquels s'applique ce principe.*

Exercice. — *Un point matériel* M *de masse* m *est repoussé* *par un centre fixe* O *suivant une force dont l'intensité a pour expression* $\frac{mK^2}{r^3}$, *où* K *est une constante réelle donnée. On demande de trouver la trajectoire, en supposant qu'à l'origine du mouvement la vitesse* v_0 *est perpendiculaire au rayon vecteur initial* $OM_0 = r_0$ *et que l'on a de plus* $K^2 = 3r_0^2 v_0^2$. *Si le temps le permet on examinera de plus près la courbe trajectoire.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Soient* A *et* B *deux points qui, par rapport à trois axes rectangulaires, ont respectivement pour coordonnées :* $x = 1, y = 0, z = 0$ *et* $x = 1, y = 1, z = 0$. *Trouver le volume du solide limité par le plan* $z = 0$, *la surface* $z = r\sqrt{x^2+y^2}$ *et le prisme droit qui a pour base le triangle* OAB.

Les candidats traiteront la question successivement par les différentes méthodes qu'ils connaissent.

II. *Calculer les intégrales*

$$\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

(Novembre 1913.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Construire la lemniscate* $\rho^2 = a^2\cos 2\omega$. *Calculer : l'angle* V *que fait la tangente à la courbe avec le rayon vecteur qui va au point de contact; — l'angle* α *que fait cette tangente avec l'axe polaire; — l'angle* θ *que fait la normale à la courbe avec le même axe polaire; — l'angle polaire* ω *étant pris pour terme de comparaison.*

2° *Calculer, avec* ω *variable indépendante, la différentielle* ds *de l'arc de la courbe, la comparer à* $d\alpha$ *et en conclure le rayon de courbure en un point en fonction du rayon vecteur* ρ.

3° *Calculer l'aire d'un secteur de lemniscate, en particulier d'une boucle.*

4° *Enfin, on fait tourner la lemniscate autour de l'axe qui passe par ses sommets. Calculer les rayons de courbure des sections normales principales en un point de la surface de révolution obtenue.*

SOLUTION.

ρ diminuant quand ω varie de ω à $\frac{\pi}{4}$, l'angle aigu V de la tangente avec le rayon vecteur est déterminé par la formule $\tang V = -\frac{\rho}{\rho'}$. On obtient $\frac{\rho'}{\rho}$ par une dérivation logarithmique et l'on a $V = \frac{\pi}{2} - 2\omega$. On voit ensuite que l'on a $\alpha = 3\omega - \frac{\pi}{2}$ et enfin $\theta = 3\omega$, résultat remarquable.

Des formules

$$ds = \frac{a\,d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} \qquad \text{et} \qquad d\alpha = 3\,d\omega$$

on tire de suite

$$R = \frac{1}{3}\frac{a^2}{\rho}.$$

Pour le secteur, on a

$$u = \frac{1}{4}a^2 \sin 2\omega,$$

ω *partant de zéro.*

La section principale qui touche le parallèle de la surface de révolution a pour rayon

$$R_1 = \frac{\rho \sin\omega}{\sin 3\omega}.$$

(Octobre 1913.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point pesant* M *est assujetti à se mouvoir sans frottement sur un cercle vertical de rayon* R *Il est repoussé par une force perpendiculaire à la tangente* AB *proportionnellement à la distance de* M *à* AB.

La répulsion à la distance R *est égale au poids du point.*

Trouver les positions d'équilibre en donnant numériquement la tangente de la moitié de l'angle θ *que fait le rayon* OM *avec la verticale, et marquer sur la figure ces positions d'équilibre.*

Dire si elles sont stables ou instables.

SOLUTION.

La projection des forces $mg\,(1 + \sin\theta)$ et mg sur la tangente au cercle donne une somme algébrique

$$T = mg\,(1 + \sin\theta)\cos\theta - mg\sin\theta.$$

Dans le cas de l'équilibre, T est nulle et l'on a

$$1 + \sin\theta = \tang\theta.$$

En posant $\tang\frac{\theta}{2} = t$, on est conduit à résoudre numériquement l'équation

$$t^4 + 4t^3 - 1 = 0.$$

Il y a une racine positive

$$t_1 = 0,62 = \tang 31^\circ 48'$$

et une racine négative

$$t_2 = -4,01 = \tang(-75^\circ),$$

ce qui donne

$$\theta_1 = 63^\circ 36' \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = -150^\circ$$

et correspond à deux positions presque opposées sur le cercle.

La dérivée $T' = mg\,(\cos\theta + \cos^2\theta - \sin\theta)$ est manifestement négative pour un angle voisin de 60°, il en résulte que T varie en sens inverse de θ dans le voisinage de l'équilibre θ_1 qui est par suite stable. L'autre équilibre θ_2 est forcément instable : on peut d'ailleurs le vérifier par la considération de la dérivée T'. (Novembre 1913.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Les axes étant rectangulaires, on donne la parabole représentée par l'équation*

$$y^2 = 2px.$$

En un point (x, y) *de la parabole on mène la tangente, et une droite* D *symétrique de la tangente, par rapport à la parallèle à l'axe* OX *qui passe par* M.

1° *Déterminer les coordonnées du point* M′ *où la droite* D *rencontre la parabole.*

2° *Déterminer les coordonnées du point* C, *milieu de* MM′, *et trouver le lieu du point* C, *quand le point* M *décrit la parabole.*

3° *Trouver l'enveloppe d'une droite* CN, *passant par* C, *et parallèle à la tangente en* M *à la parabole.*

4° N *étant le point de contact de la droite* CN *avec son enveloppe, démontrer que la droite* NM *passe par le sommet* O *de la parabole.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une courbe* C *est représentée, en coordonnées polaires, par l'équation*

$$\rho^2 = a^2 \frac{1 + \cos^2 \omega}{2}.$$

Montrer que cette courbe est fermée et intérieure à la circonférence du centre O *et de rayon* a.

Une sphère de rayon a *a pour centre l'origine. Calculer l'aire de la portion de la sphère située au-dessus du plan* xOy, *qui se projette, sur ce plan* xOy, *à l'intérieur de la courbe* C. (Juin 1913.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une courbe* C *est représentée, par rapport à trois axes rectangulaires, par les équations*

$$x = 3t, \qquad y = 3t^2, \qquad z = 2t^3,$$

où t *est un paramètre variable.*

1° *Former les équations de la tangente en un point quelconque* M *de la courbe et déterminer les points* A *et* B *où cette tangente rencontre les plans* xOy *et* xOz.

2° *Montrer que le rapport* $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ *est constant, et trouver le lieu du point* A, *et celui du point* B, *lorsque* M *décrit la courbe* C.

3° *Calculer la longueur de l'arc* OM *de la courbe* C.

4° *Du point* M *de la courbe* C *on abaisse une perpendiculaire* MP *sur le plan* xOy, *et l'on porte sur* MP, *dans le sens de* M *vers* P, *une longueur* MQ *égale à l'arc* OM. *Trouver le lieu du point* Q.

Épreuve pratique. — 1° *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle du troisième ordre*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} - 2y = 2\sin x + \cos x - 2x - 3.$$

2° *Déterminer une intégrale particulière qui représente une courbe passant par l'origine, tangente en* O *à l'axe* Ox, *et pour laquelle ce point* O *est un point d'inflexion.*

(Novembre 1913.)

Nancy.

Première Partie : Analyse. — I. *Intégration de l'équation linéaire du premier ordre par la méthode de variation des constantes; donner un exemple.*

II. *Soient* Ox *et* Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires et* C *une courbe tracée dans l'angle positif de ces axes. On désigne par* P *le pied de l'ordonnée d'un point quelconque* M *de cette courbe, par* T *le point de rencontre de la tangente en* M *avec l'axe* Ox *et l'on suppose* OT > OP.

1° *Déterminer les courbes* C *pour lesquelles l'aire comprise entre l'axe* Ox, *la courbe* C, *l'axe* Oy *et l'ordonnée* PM *est égale à l'aire du triangle* PMT. *Construire les courbes* C.

2° *Démontrer que les deux aires précédentes, supposées homogènes, ont par rapport à l'axe* Oy *des moments d'inertie dont le rapport est constant quel que soit le point* M *sur une quelconque des courbes* C.

Deuxième Partie : Mécanique. — *On donne un système d'axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *l'axe* Oz *étant dirigé suivant la verticale ascendante, et l'on considère la surface représentée dans ce système d'axes par l'équation*

$$\frac{z}{h} = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

où h désigne une constante :

1° *Trouver la projection sur le plan* xOy *du lieu des points de cette surface où le plan tangent est parallèle à* *la droite d'équations*

$$x = az, \qquad y = bz.$$

2° *Sur cette surface se déplace sans frottement un point matériel* A, *de masse* m, *soumis d'une part à l'action de la pesanteur, d'autre part à celle d'une force* F, *parallèle au plan* $x\mathrm{O}y$, *et variable avec la position du point* A. *Comment doit être choisie cette force* F *pour que le point soit en équilibre sur la surface dans une position quelconque? Quel est le moment de* F *par rapport à* Oz?

3° *Calculer le travail de la force* F *lorsque le point* A *passe d'une position* A_0 *à une position* A_1 *en restant sur la surface.* (Juin 1912.)

Première Partie. — 1° *Conditions pour que*

$$\mathrm{P}(x, y, z)\,dx + \mathrm{Q}(x, y, z)\,dy + \mathrm{R}(x, y, z)\,dz$$

soit une différentielle totale exacte. Lorsque les conditions sont satisfaites, calculer l'intégrale indéfinie de cette différentielle.

Soient C *une courbe rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et* MN *la normale en un point quelconque* M, *limitée à son point de rencontre* N *avec* Ox.

1° *Déterminer les courbes* C *pour lesquelles on a*

$$\mathrm{MN} = m.\mathrm{OM},$$

m *étant une constante donnée.*

2° *Tracer une des courbes intégrales correspondant à* $m = 2$ *en utilisant les expressions de* x *et* $\frac{y^2}{x^2}$ *en fonction d'un même paramètre.*

Deuxième Partie. — *On considère les droites représentées par les équations*

$$(1) \qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = a^2 z + 4ap, \end{cases}$$

où a *est un paramètre variable et* p *une fonction de* a :

1° *Comment doit-on choisir cette fonction* p *pour que ces droites aient une enveloppe? Déterminer l'arête de rebroussement.*

2° *Un point matériel, de masse m, se déplace sans frottement sur une quelconque des droites représentées par les équations* (1), *les composantes de la force qui le sollicite étant*

$$X = \frac{y}{z^2}, \qquad Y = \frac{x}{z^2}, \qquad Z = -\frac{2xy}{z^3}.$$

Déterminer les positions d'équilibre du point sur la droite. Écrire l'équation de son mouvement en utilisant le théorème des forces vives. (Octobre 1912.)

Calcul différentiel et intégral. — I. Question de cours : *Calcul d'une intégrale double en coordonnées polaires.*

II. *Les axes* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on considère la courbe du plan* xOy *dont l'équation est*

$$\frac{1}{\rho} = 1 + \cos\frac{\theta}{2},$$

en prenant Ox *comme axe polaire, et l'on désigne par* C *la partie de cette courbe en forme de boucle, obtenue en faisant varier* θ *de* $-\pi$ *à* $+\pi$. *Trouver, en partant de la notion d'intégrale double, l'aire du cône dont le sommet est le point de l'axe* Oz *de coordonnées* $(0, 0, 2\sqrt{3})$ *et dont la base est la boucle* C.

Géométrie et Mécanique. — *Les axes de coordonnées* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires et* Oz *étant la verticale ascendante, on considère le paraboloïde de révolution représenté par l'équation*

$$2z = x^2 + y^2.$$

1° *Déterminer sur cette surface une courbe* C *telle que la tangente en chacun de ses points fasse un angle constant égal à* $\frac{\pi}{4}$ *avec la tangente au parallèle en ce point. On déterminera l'équation en coordonnées polaires de la projection de cette courbe sur le plan* xOy.

2° *Un point matériel pesant, de masse m, est assujetti à se mouvoir sans frottement sur la surface du paraboloïde et est soumis à l'action de la pesanteur et à celle d'une* *force normale à l'axe du paraboloïde fonction seulement de la distance du point à l'axe. Comment doit être choisie cette force pour que la trajectoire du point sur le paraboloïde soit la courbe* C? *Quelle est la loi du mouvement?*

(Juin 1913.)

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL. — 1° *Trouver les solutions de l'équation différentielle*

$$2xy\frac{dy}{dx} = K(x^2 + y^2).$$

Examiner si l'intégrale générale est donnée par la même formule pour toutes les valeurs de la constante K.

2° *Les axes* Ox, Oy *étant rectangulaires, tracer la famille des courbes intégrales pour* $K = 2$. *Préciser la forme de ces courbes en déterminant les tangentes d'inflexion et traçant la courbe lieu des points d'inflexion.*

3° *Montrer que les sous-normales menées aux diverses courbes intégrales* ($K \neq 2$ *ou* $= 2$) *en leurs points d'intersection avec un cercle donné et tangent à l'origine à l'axe* Oy *ont une même valeur.*

GÉOMÉTRIE. — *Trouver la condition pour que des droites de l'espace représentées par les équations*

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

où a, b, p, q, *sont fonctions d'un même paramètre* t, *aient une enveloppe.*

MÉCANIQUE. — *Un point matériel, de masse* m, *est assujetti à se déplacer sans frottement sur une droite d'équations*

$$x = z\sqrt{3}, \qquad y = 2z\sqrt{3};$$

il est soumis à l'action de plusieurs forces dont la résultante a pour projections sur les axes de coordonnées

$$X = -Kmy, \qquad Y = -Kmx, \qquad Z = -mg.$$

Trouver la position d'équilibre de ce point et étudier son mouvement. (Octobre 1913.)

Paris.

Analyse et Géométrie analytique. — I. *Vérifier que les fonctions x et y de la variable indépendante t qui sont définies par les équations*

$$(1)\qquad x = a\cos^3 t,\qquad y = a(\sin^3 t - 3\sin t),$$

où a désigne une longueur constante donnée, satisfont au système d'équations différentielles

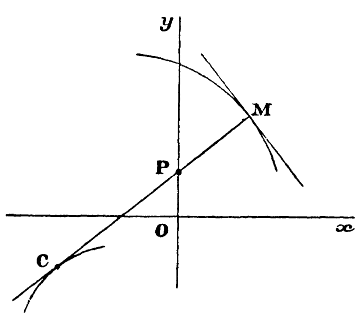
$$(2)\qquad \frac{dx}{dt} - 3y = 6a\sin t,\qquad \frac{dy}{dt} + 3x = 0.$$

II. *Montrer qu'on retrouve les fonctions* (1) *en intégrant le système* (2) *avec les conditions initiales*

$$x = a,\qquad y = 0\qquad \text{pour}\qquad t = 0.$$

III. *Construire la courbe représentée par les équations*(1), *x et y désignant des coordonnées rectangulaires.*

IV. *Trouver toutes les courbes dont chaque rayon de*



courbure MC *est coupé par l'axe* Oy *au tiers de ce rayon de courbure à partir de son pied* M (MC = 3MP). *Comment ces courbes se déduisent-elles de la courbe* (1)?

Mécanique. — *Un point matériel* M *non pesant, de masse m, est mobile sans frottement sur un plan* P *dans lequel on a fixé deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *Le* *point* M *est soumis à une force* F *dont les composantes sur les axes* Ox *et* Oy *sont respectivement*

$$X = my, \qquad Y = mx.$$

1° *Existe-t-il une fonction de forces? Et, s'il en est ainsi, la donner ainsi que les courbes de niveau.*

2° *Former et intégrer l'équation différentielle des lignes de force. Montrer qu'on obtient les lignes de force en faisant tourner les courbes de niveau d'un certain angle autour de* Q.

3° *Écrire les équations différentielles du mouvement du point* M *sous l'action de* F. *Donner l'intégrale générale de ces équations.*

4° *Les conditions initiales étant*

$$x_0 = -1, \qquad y_0 = 1, \qquad \frac{dx_0}{dt} = +1, \qquad \frac{dy_0}{dt} = -1.$$

montrer que la trajectoire est rectiligne et que le mouvement du point M *est périodique.*

Quelle est la période de ce mouvement?

Épreuve pratique. — *Soit* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 105x + 200$.

1° *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *a trois racines réelles.*

2° *Calculer les valeurs de* $f(x)$ *pour les valeurs croissantes de* x *à partir de* $x = 7$, *de dixièmes en dixièmes, jusqu'à ce qu'on trouve un résultat positif.*

3° *Calculer, à un millième près, la racine comprise entre* 7 *et* 8.

Nota. — *Les candidats auront à leur disposition des feuilles de papier quadrillé, mais toute méthode de calcul de la racine demandée est admise.* (Juillet 1913.)

Composition d'Analyse. — I. 1° *Trouver les deux fonctions de* x *qui satisfont à l'équation différentielle*

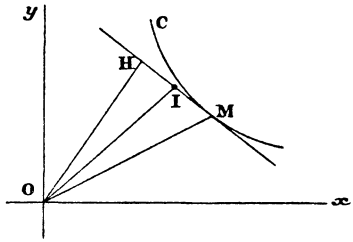
$$y'' + 2y' + 4y = 7e^x - 4x - 6$$

et aux conditions initiales

$$y = 0, \qquad y' = \pm 1 \qquad \text{pour} \qquad x = 0.$$

2° *Développer en série entière la différence de ces deux fonctions.*

II. *Étant donnés, dans un plan, deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère les courbes* (C) *de ce plan qui possèdent la propriété suivante :* M *étant un point quel-*



conque de la courbe, et H *la projection de* O *sur la tangente en* M *à la courbe, la médiane* OI *du triangle* OMH *a une longueur constante donnée* a.

1° *Former l'équation différentielle* (E) *qui lie les coordonnées* x, y *d'un point quelconque d'une courbe* (C).

2° *Montrer que, si l'on passe en coordonnées polaires* ρ, ω *d'origine* O *et d'axe polaire* Ox, *l'équation différentielle* (E) *devient l'équation* (E')

$$3\rho^4 d\omega^2 + (\rho^2 - 4a^2)(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2) = 0.$$

3° *Intégrer cette dernière équation différentielle, en se servant du changement de variable* $\rho^2 = a^2 u$.

4° *Déduire de l'équation* (E), *indépendamment de toute intégration, que, si une courbe* (C) *ne se réduit pas à un cercle de centre* O, *son rayon de courbure en* M, *est égal à* 3OH.

5° *Montrer que l'équation générale des courbes* (C) *peut s'écrire, en désignant par* β *une constante arbitraire,*

$$\left(\frac{2a}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin^{\frac{2}{3}}(\omega - \beta) = \cos^{\frac{2}{3}}(\omega - \beta).$$

En conclure la forme des courbes C.

MÉCANIQUE. — *Un point matériel* M, *de masse* $m = 1$, *non pesant, situé dans le plan* xOy, *est soumis à l'action d'une force* $\overrightarrow{F}$ *dont les composantes par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *sont respectivement*

$$X = 1 - \frac{y^2}{x^2}, \qquad Y = \frac{2y}{x}.$$

1° *Trouver l'équation des lignes de force du champ créé par* $\overrightarrow{F}$ *et construire ces lignes.*

2° *Existe-t-il une fonction de forces? S'il en est ainsi, la déterminer et construire les lignes de niveau.*

3° *On imagine que le point* M *est assujetti à se mouvoir dans un tube de section infiniment petite dirigé suivant la droite* $y = x + 1$. *Le mouvement a lieu sans frottement; à l'origine des temps le mobile est lancé du point* A *d'abscisse* $x = 1$ *avec une vitesse dont la composante initiale est* $x'_0 = -(1 + \sqrt{2})$.

Montrer comment le théorème des forces vives permet de trouver la position de M *en tout instant; en particulier, indiquer le temps employé par le mobile pour aller de* A *jusqu'au point* B. *Intersection du tube et de l'axe des* y; *et donner le travail effectué de* A *en* B.

Épreuve pratique. — *Calculer à* 0,0001 *près les abscisses des points de contact des tangentes menées, par l'origine des coordonnées, à la courbe*

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On pourra ramener d'abord l'équation du problème à la forme

$$L\frac{x+1}{x-1} - 2x = 0.$$

Toutes les méthodes d'approximation, y compris les méthodes purement graphiques, sont admises.

(Octobre 1913.)

Rennes.

Composition écrite. — I. *Courbure des courbes gauches.* (Formules de Serret.)

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{a^2 - x^2}.$$

si l'on détermine la constante d'intégration de manière qu'on ait $y = 0$ *pour* $x = 0$, *on obtient l'intégrale particulière*

$$y = -a \log\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \tag{1}$$

Étudier la forme de la courbe représentée par l'équation (1) *en coordonnées rectangulaires. Calculer l'expression du rayon de courbure, et la longueur d'arc comptée à partir de l'origine.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Soit la courbe*

$$x = 6t + 6t^2 + 2t^3,$$
$$y = 2t^3,$$
$$z = 6t.$$

Calculer les cosinus directeurs α, β, γ *de la tangente. Incidemment démontrer l'identité*

$$(1 + t)^4 + t^4 + 1 = 2(1 + t + t^2)^2$$

et en conclure que α, β, γ *ainsi que la vitesse* $V = \frac{ds}{dt}$ *sont rationnels en* t.

2° *Calculer les coefficients* A, B, C *du plan osculateur*

$$A = y'z'' - z'y''; \qquad B = z'x'' - x'z''; \qquad C = x'y'' - y'x''.$$

Incidemment démontrer l'identité

$$t^2 + (1 + t)^2 + t^2(1 + t)^2 \equiv (1 + t + t^2)^2$$

et en conclure que les cosinus directeurs de la binormale, α'', β'', γ'', *sont rationnels en* t. (Novembre 1913.)