Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 191-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__191_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

829.

(1867, p. 479.)

On donne dans un plan une ellipse (E) *et une circonférence* (O) *concentriques. Une seconde circonférence* (O′) *roule sans glisser sur la première. On demande le lieu des points* M *d'intersection des tangentes communes à la circonférence* (O′) *et à l'ellipse* (E).

E. DEMAN.

SOLUTION.

Par M. H. BROCARD.

Cette question étant demeurée non résolue depuis bientôt un demi-siècle, je me bornerai à démontrer que sa solution aurait pu être produite en observant sa corrélation très intime avec une question analogue et traitée à diverses reprises.

Soient K, L deux points d'intersection de l'ellipse (E) et du cercle (O′).

Si, pour un instant, on ne tient pas compte du cercle (O), le problème sera presque identique à celui du lieu (M) pour des cercles (O′) *variables*, passant par les points K, L.

Or, c'est là une variante bien connue du problème que Chasles a proposé au Concours général de 1844 (*voir* 1844, pp. 377, 425-431 et 495-503; 1851, pp. 408-411). Elle a été, depuis, maintes fois étudiée, comme on le verra ici au Volume de 1880, pp. 122-133 (Le Cointe) et 184-188 (G. Darboux).

J'estime qu'il suffira de suivre exactement les indications de ces deux articles pour obtenir rapidement la solution analytique de la question 829.

On aura d'abord les équations de l'ellipse et du cercle

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$
$$(x-d)^2 + (y-e)^2 - r^2 = 0,$$

et la condition de tangence des cercles (O) et (O′) se réduira simplement à

$$(\mathrm{T}) \qquad d^2 + c^2 = l^2.$$

On formera ensuite les équations des deux tangentes menées de $M(\alpha, \beta)$ à l'ellipse (E) et au cercle (O′); mais les deux couples de tangentes devant coïncider, les deux équations précitées seront identiques. On en déduira trois nouvelles égalités entre les quantités d, e et une troisième λ.

Il restera à éliminer d, e et λ entre ces équations et l'équation (T).

La question étant ainsi classée, quelque lecteur voudra bien sans doute achever cette recherche qui, très probablement, aboutira à une équation (M) du sixième degré, avec des réductions possibles, comme pour le problème de Chasles (1880, *loc. cit.*).

937.

(1869, p. 271.)

Une ellipse roule sur une autre ellipse. Trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes.

DAUPLAY.

SOLUTION.

Par M. H. BROCARD.

Si l'ellipse mobile (E′) était remplacée par un cercle, et qu'il fallût exprimer l'égalité d'un arc AM′ du cercle à un arc AM de l'ellipse fixe (E), la question ainsi transformée serait manifestement insoluble. Cependant, elle peut se résoudre assez simplement, mais parce que la condition de roulement du cercle n'a pas à intervenir : il suffit que le cercle se déplace par translation.

L'impossibilité de traduire l'égalité des deux arcs AM′ et AM d'ellipses (E′) et (E) s'aggravera encore de ce fait que les deux ellipses données sont quelconques et tangentes en un point quelconque. Il n'y aura pas de formules capables de représenter la situation de l'ellipse mobile (E′).

Je ne m'explique pas que cette question ait pu être proposée; elle ne pourrait même servir de sujet à un Grand Prix de Mathématiques.