NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEMAIRE

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1914)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 13-29

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__13_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1914).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. J. LEMAIRE,
Professeur au Lycée Janson de Sailly.

On donne un hyperboloïde à une nappe rapporté à ses axes et dont l'équation est

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{\rho^2} = 1.$$

I. *Il existe deux familles de tels hyperboloïdes susceptibles d'être engendrées par l'intersection de plans rectangulaires passant respectivement par deux droites fixes; on peut passer d'un hyperboloïde* H *de la première famille à un hyperboloïde* H′ *de la seconde famille par rotation d'un angle droit autour de* OZ. *Soient* D, Δ *les droites fixes relatives à* H; D′ Δ' *les droites fixes relatives à* H′; *trouver les surfaces lieux de* D, Δ *et de* D′ Δ', *quand* λ, μ *varient*, ρ *étant fixe. Il existe des plans* P *parallèles au plan* XOY *coupant ces surfaces suivant deux courbes qui ont un point commun* A *situé sur* OZ *et un point commun* B *réel situé dans le trièdre* OXYZ; *évaluer l'aire limitée par les arcs* AB *des deux courbes, ainsi que le volume engendré par cette aire quand le plan* P *a une cote variant de* z_1 *à* z_2.

II. *A un hyperboloïde* H_1 *de la première famille,* *on peut faire correspondre une infinité d'hyperboloïdes de la seconde famille, tels que les droites fixes relatives à* H_1 *et les droites fixes relatives à un de ces derniers forment un quadrilatère gauche ; soient* H_2 *un tel hyperboloïde ;* $D_1 \Delta_1$ *et* $D_2 \Delta_2$ *les droites fixes relatives respectivement à* H_1 *et à* H_2 ; ABCD *le quadrilatère formé par ces droites ; montrer que l'hyperboloïde* H_3, *engendré par l'intersection de deux plans rectangulaires passant respectivement par les diagonales du quadrilatère, appartient au faisceau ponctuel linéaire défini par* H_1 *et* H_2 ; *que les pieds* a, b, c, d *des hauteurs* Aa, Bb, Cc, Dd *du tétraèdre* ABCD *sont sur la courbe du faisceau, et que les droites autres que les hauteurs, qui joignent les points* A, B, C, D *aux points* a, b, c, d, *sont sur un hyperboloïde* H_1, H_2 *ou* H_3.

III. *L'hyperboloïde* H_1 *étant donné, on peut, par un point* A *de l'espace, faire passer deux hyperboloïdes* H_2 *de la seconde famille, définis comme il a été indiqué* (II) ; *sur quelle surface* S *doit se trouver* A *pour que ces hyperboloïdes* H_2 *soient confondus ? On peut de même, par le point* A, *faire passer deux hyperboloïdes* H_3 *définis comme il a été indiqué* (II) ; *sur quelle surface* S' *doit être* A *pour que ces hyperboloïdes* H_3 *soient confondus ? Montrer que* H_1 *coupe* S *et* S' *suivant la même courbe* C, *et que l'intersection de* S *et* S' *se compose de la courbe* C *et d'une courbe imaginaire.*

IV. *Construire la projection* Γ, *sur le plan* XOY, *de la courbe* C ; *montrer que* Γ *est l'enveloppe de cercles orthogonaux à un cercle fixe, et trouver le lieu des centres de ces cercles. Trouver le lieu des* *milieux des cordes de la courbe* Γ *qui passent par l'origine.*

I. On sait que si deux plans rectangulaires tournent respectivement autour de deux droites D, Δ non en même plan, leur intersection engendre un hyperboloïde contenant D et Δ, ayant ses plans de sections circulaires perpendiculaires à ces droites, et dont l'ellipse de gorge a pour axe focal leur plus courte distance ; inversement, si un hyperboloïde a ses sections circulaires perpendiculaires à deux génératrices, qui passent nécessairement aux extrémités de l'axe focal de l'ellipse de gorge, il est susceptible de ce mode de génération. Si donc l'hyperboloïde

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{\rho^2} = 1$$

peut être ainsi engendré, les droites D et Δ ne peuvent être que deux génératrices de même espèce passant aux sommets opposés situés sur X'X ou Y'Y.

Première famille. — D et Δ passent aux extrémités de l'axe appartenant à X'X ; les équations de D étant

$$(\mathrm{D}) \qquad x = \lambda, \qquad z = \frac{\rho y}{\mu},$$

celles de Δ sont

$$(\Delta) \qquad x = -\lambda, \qquad z = -\frac{\rho y}{\mu}.$$

Les plans perpendiculaires à ces droites et passant par OX, c'est-à-dire les plans

$$(2) \qquad -\frac{y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\mu^2} = 0$$

devant être des plans cycliques, l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\rho^2}\right)(y^2 + z^2) = 1,$$

obtenue en ajoutant (1) et (2) membre à membre, doit représenter une sphère, d'où la condition

$$(3) \qquad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\rho^2}$$

qui exige $\lambda > \mu$.

En remplaçant D et Δ par les génératrices de l'autre système passant aux mêmes sommets, on a le même hyperboloïde H.

Deuxième famille. — Par analogie, si l'on a

$$(3)' \qquad \frac{1}{\mu'^2} = \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{1}{\rho'^2},$$

l'hyperboloïde correspondant H' est susceptible du mode de génération indiqué dans l'énoncé, les droites D' et Δ' étant les génératrices de même espèce,

$$(\mathrm{D}') \qquad y = \mu', \qquad z = \frac{\rho' x}{\lambda'};$$

$$(\Delta') \qquad y = -\mu', \qquad z = -\frac{\rho' x}{\lambda'}.$$

Si $\lambda = \mu'$ et $\lambda' = \mu$, d'où $\rho = \rho'$, on peut passer de l'un des hyperboloïdes H et H' à l'autre par une rotation d'un angle droit autour de OZ.

Lieu de D *et* Δ. — L'équation du lieu des droites D et Δ, quand λ et η varient, ρ restant fixe, s'obtient en éliminant λ et μ entre les équations de l'une ou l'autre de ces droites et la condition (3), ce qui donne

$$(\mathrm{D}) \qquad x^2(z^2 - y^2) = \rho^2 y^2.$$

Le lieu des droites D′ et Δ′ est de même la surface ayant pour équation

$$(\mathrm{D}') \qquad y^2(z^2-x^2)=\rho^2x^2.$$

Ces deux surfaces sont symétriques par rapport aux plans bissecteurs des dièdres formés par les plans ZOX, ZOY, ce qui résulte de la position relative des hyperboloïdes des deux familles. Retranchant la seconde équation de la première, nous avons

$$z^2(x^2-y^2)=\rho^2(y^2-x^2),$$

d'où il suit que l'intersection des deux surfaces se compose : 1° de OZ, ligne double de chaque surface, qui compte pour quatre droites communes ; 2° de deux courbes imaginaires du quatrième degré contenues dans les plans $z=\pm\rho i$; 3° de deux coniques situées dans les plans $y=\pm x$, et projetées sur le plan ZOX suivant l'hyperbole équilatère

$$(\mathrm{C}') \qquad z^2-x^2=\rho^2.$$

On déduit de là une génération simple de la surface (D) : (C) désignant l'hyperbole du plan $y=x$ projetée suivant (C′), cette surface est le conoïde droit ayant OX pour axe et (C) pour directrice. La surface (D′) est susceptible d'une génération analogue, en remplaçant OX par OY.

Si $z=h$ est l'équation d'un plan P parallèle à XOY, il coupe les surfaces précédentes suivant des courbes ayant pour projections sur ce dernier plan

$$(d) \qquad x^2(h^2-y^2)=\rho^2y^2,$$

$$(d') \qquad y^2(h^2-x^2)=\rho^2x^2.$$

Écrivant l'équation de (d) sous la forme

$$y^2=\frac{h^2}{1+\frac{\rho^2}{x^2}},$$

nous trouvons pour cette courbe la forme ci-dessous (*fig.* 1) : elle admet les axes pour axes de symétrie,

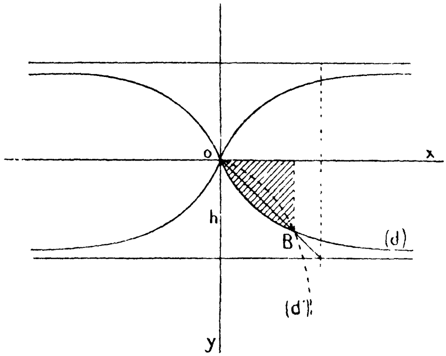

Fig. 1.

les droites $y = \pm h$ pour asymptotes, l'origine pour point double d'inflexion. La courbe (d') est la symétrique de la précédente par rapport à la bissectrice de $\widehat{XOY}$; les arcs situés dans cet angle se coupent au point B $\left(\sqrt{h^2 - \rho^2}, \sqrt{h^2 - \rho^2}\right)$.

L'aire hachurée, comprise entre OX, l'arc OB de (d), et l'ordonnée de B, a pour valeur

$$\int_0^{\sqrt{h^2-\rho^2}} y\,dx = \int_0^{\sqrt{h^2-\rho^2}} \frac{h\,x\,dx}{\sqrt{x^2+\rho^2}}$$
$$= \left[h\sqrt{x^2+\rho^2}\right]_0^{\sqrt{h^2-\rho^2}} = h(h-\rho).$$

L'aire comprise entre les arcs OB des deux courbes (d) et (d') vaut

$$2\left[h(h-\rho) - \frac{h^2-\rho^2}{2}\right] = (h-\rho)^2.$$

Le point B n'est réel qu'à partir de $h \geqq \rho$; le volume engendré par cette aire et compris entre les plans de cote z_1 et z_2 a pour expression

$$\int_{z_1}^{z_2} (h-\rho)^2\,dh = \left[\frac{1}{3}(h-\rho)^3\right]_{z_1}^{z_2}.$$

II. Soient H_1 un hyperboloïde de la première famille

$$(H_1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{\rho^2} = 1$$

avec

$$(3) \qquad \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\rho^2} \qquad (\lambda > \mu);$$

les droites correspondantes D_1 et Δ_1 ayant pour équations

$$(D_1) \quad \left\{\begin{array}{l} x = \lambda, \\ z = \dfrac{\rho y}{\mu}; \end{array}\right. \qquad (\Delta_1) \quad \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda, \\ z = -\dfrac{\rho y}{\mu}, \end{array}\right.$$

et H_2 un hyperboloïde de la seconde famille

$$(H_2) \qquad \frac{x^2}{\lambda'^2} + \frac{y^2}{\mu'^2} - \frac{z^2}{\rho'^2} = 1$$

avec

$$(3)' \qquad \frac{1}{\lambda'^2} = \frac{1}{\mu'^2} + \frac{1}{\rho'^2} \qquad (\mu' > \lambda'),$$

les droites D_2 et Δ_2 ayant pour équations

$$(D_2) \quad \left\{\begin{array}{l} y = \mu', \\ z = \dfrac{\rho' x}{\lambda'}; \end{array}\right. \qquad (\Delta_2) \quad \left\{\begin{array}{l} y = -\mu', \\ z = -\dfrac{\rho' x}{\lambda'}. \end{array}\right.$$

Écrivant que D_1 et D_2 se coupent, nous avons la condition

$$(4) \qquad \frac{\lambda\mu}{\rho} = \frac{\lambda'\mu'}{\rho'}$$

qu'on trouverait également en écrivant que D_1 et Δ_2 se coupent, ou D_2 et Δ_1, ou Δ_1 et Δ_2. Donc à un système

(λ, μ, ρ) correspondent une infinité de systèmes (λ', μ', ρ') satisfaisant aux conditions $(3)'$ et (4), autrement dit à un H_1 correspondent une infinité de H_2 tels que les droites fixes relatives à H_1 et les droites fixes relatives à chaque H_2 forment un quadrilatère gauche ABCD; H_1 étant supposé fixe, le lieu des droites D_2, Δ_2 relatives à H_2 est le paraboloïde équilatère passant par D_1, Δ_1, et ayant XOZ pour plan directeur (*fig.* 2)

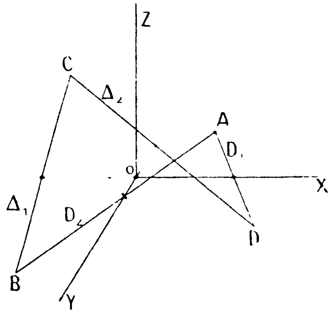

Fig. 2.

Les coordonnées des sommets du quadrilatère gauche ABCD sont :

$$(A)\begin{cases}\lambda,\\ \mu',\\ \dfrac{\rho\mu'}{\mu};\end{cases}\quad (B)\begin{cases}-\lambda,\\ \mu',\\ -\dfrac{\rho\mu'}{\mu};\end{cases}\quad (C)\begin{cases}-\lambda,\\ -\mu',\\ \dfrac{\rho\mu'}{\mu};\end{cases}\quad (D)\begin{cases}\lambda,\\ -\mu',\\ -\dfrac{\rho\mu'}{\mu},\end{cases}$$

avec

$$\frac{\lambda\mu}{\rho} = \frac{\lambda'\mu'}{\rho'}.$$

Les diagonales AC et BD ont pour équations

$$(AC)\quad\begin{cases}z = \dfrac{\rho\mu'}{\mu},\\ y = \dfrac{\mu' x}{\lambda};\end{cases}\qquad (BD)\quad\begin{cases}z = -\dfrac{\rho\mu'}{\mu},\\ y = -\dfrac{\mu' x}{\lambda}.\end{cases}$$

Observons que les relations (3) (3)', (4) qui lient les paramètres de H_1 et H_2 entraînent la suivante

$$\lambda^2 - \mu^2 = \mu'^2 - \lambda'^2 ;$$

donc les distances focales des ellipses de gorge de deux tels hyperboloïdes sont égales, et *les ellipses de gorge de tous les* H_2 *correspondant à un même* H_1 *sont homofocales*.

Soit M (x, y, z) un point de l'hyperboloïde H_3 engendré par l'intersection de deux plans rectangulaires passant respectivement par AC et BD ; les plans MAC et MBD ont pour équations

$$(\text{MAC}) \qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ \lambda & \mu' & \dfrac{\rho\mu'}{\mu} & 1 \\ -\lambda & -\mu' & \dfrac{\rho\mu'}{\mu} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\text{MBD}) \qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ \lambda & -\mu' & -\dfrac{\rho\mu'}{\mu} & 1 \\ -\lambda & \mu' & -\dfrac{\rho\mu'}{\mu} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation de H_3 est la condition de perpendicularité de ces plans, c'est-à-dire

$$(H_3) \quad -\mu'^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + (\lambda^2 - \mu'^2) z^2 + \frac{\rho^2 \mu'^2}{\mu^2} (\mu'^2 - \lambda^2) = 0.$$

Les équations de H_1 et H_2 étant

$$(H_1) \equiv \mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - \frac{\lambda^2 \mu^2}{\rho^2} z^2 - \lambda^2 \mu^2 = 0,$$

$$(H_2) \equiv \mu'^2 x^2 + \lambda'^2 y^2 - \frac{\lambda'^2 \mu'^2}{\rho'^2} z^2 - \lambda'^2 \mu'^2 = 0,$$

un calcul aisé montre que

$$\mu'^2(\lambda^2+\lambda'^2)(H_1)-\lambda^2(\mu^2+\mu'^2)(H_2)$$

est identique, à un facteur près, en tenant compte des conditions (3), (3)', (4), au premier membre de l'équation de H_3, ce qui établit que les trois hyperboloïdes appartiennent à un même faisceau ponctuel. On peut s'en rendre compte géométriquement à l'aide du théorème suivant : ABCD *étant un tétraèdre quelconque*, M *un point de l'espace, si les plans* MAB *et* MCD, MBC *et* MDA, *sont rectangulaires, il en est de même des plans* MAC *et* MBD.

Rappelons que les cercles décrits sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres ont deux joints communs, d'où il résulte que le lieu des points de l'espace desquels on voit deux diagonales, et par suite les trois, sous un angle droit, est le cercle ayant pour diamètre le segment qui joint ces deux points, et situé dans un plan perpendiculaire à celui du quadrilatère.

Pour établir que, les plans MAB et MCD étant rectangulaires, ainsi que MBC et MDA, il en est de même des plans MAC et MBD, menons en M des perpendiculaires à ces plans et coupons-les par un plan Π qui les rencontre aux points ab, cd, ..., bd. Les droites Mab, Mac, Mad, perpendiculaires à MA, sont en même plan, et les points ab, ac, ad sont en ligne droite; il en est de même des points ab, bc, bd, des points ac, bc, cd et des points ad, bd, cd, de sorte que ces six points forment un quadrilatère complet.

A cause de l'hypothèse, les angles $(\widehat{ab, \mathrm{M}, cd})$ et $(\widehat{bc, \mathrm{M}, ad})$ sont droits; par suite, la troisième diagonale est vue aussi de M sous un angle droit, l'angle

$(\widehat{ac, M, bd})$ est droit; les plans MAC et MBD, qui sont perpendiculaires aux côtés de cet angle, sont bien rectangulaires. C. Q. F. D.

Si nous appelons H_2, H_1, H_3 les hyperboloïdes ayant pour droites fondamentales AB et CD, BC et AD, AC et BD, ce théorème montre que tout point commun à deux de ces surfaces appartient à la troisième : ces hyperboloïdes font partie d'un même faisceau ponctuel.

Ainsi *il existe une infinité de points déterminant avec chaque groupe d'arêtes opposées un dièdre droit, et ces points forment une biquadratique gauche.*

Si a est le pied de la hauteur issue de A, les plans ABa, DCa sont rectangulaires, et leur droite commune Ba est une droite de H_2; de même Da, intersection des plans rectangulaires ADa et BCa, est une droite de H_1, et enfin Ca une droite de H_3; même propriété pour les droites analogues relatives aux autres hauteurs du tétraèdre; ainsi H_2 contient les droites Ba, Ab, Cd, Dc; H_1 contient les droites Da, Ad, Bc, Cb; et H_3 les droites Ca, Ac, Db, Bd. Les points a, b, c, d sont bien sur la biquadratique commune aux trois hyperboloïdes.

On peut observer que ces propriétés s'appliquent à un tétraèdre quelconque, et non pas seulement à un tétraèdre à arêtes opposées égales comme celui que forment les droites D_1, Δ_1, D_2, Δ_2.

III. L'hyperboloïde $H_1(\lambda, \mu, \rho)$ de la première famille étant donné, et par suite ses droites fondamentales D_1, Δ_1, tout système de droites D_2, Δ_2, parallèles au plan XOZ, équidistantes de ce plan et s'appuyant sur D_1, Δ_1 et OY, détermine un H_2; donc, par un point A de l'espace, passent autant de H_2 qu'il existe de systèmes D_2, Δ_2 pour lesquels les plans (A, D_2) et (A, Δ_2) sont rectangulaires.

Soit P le paraboloïde lieu des droites D_2, Δ_2 : le lieu géométrique des milieux des cordes déterminées par P sur des droites issues de A est un paraboloïde homothétique de P, coupant par suite le plan XOZ suivant une droite, de sorte que le lieu des droites l, passant en A, et s'appuyant sur deux droites D_2, Δ_2 équidistantes de ce plan est un plan p. D'autre part, considérons deux droites D'_2, Δ'_2 telles que les plans (A, D'_2), (A, Δ'_2) soient rectangulaires; comme ces plans sont tangents à P, le lieu de leur droite commune l' est un cône de second degré c.

A tout système de droites D_2, Δ_2 coïncidant avec un système D'_2, Δ'_2, c'est-à-dire à toute droite l confondue avec une droite l', correspond un H_2 passant en A, et réciproquement : donc il passe, par tout point de l'espace, deux, un ou zéro hyperboloïde H_2.

Pour que les deux H_2 soient confondus, il faut et il suffit que le plan p (plan focal relatif à A du complexe linéaire formé par les droites coupant P en deux points équidistants du plan ZOX) soit tangent au cône c (cône relatif à A du complexe des droites par lesquelles passent deux plans tangents à P rectangulaires) : le lieu des points satisfaisant à cette condition est une surface S dont nous allons déterminer l'équation.

Les hyperboloïdes H_2 passant par $A(x, y, z)$ sont déterminées par les relations suivantes en λ', μ', ρ' :

$$\frac{1}{\lambda'^2} = \frac{1}{\mu'^2} + \frac{1}{\rho'^2},$$

$$\frac{\lambda'\mu'}{\rho'} = \frac{\lambda\mu}{\rho},$$

$$\frac{x^2}{\lambda'^2} + \frac{y^2}{\mu'^2} - \frac{z^2}{\rho'^2} = 1.$$

$\frac{1}{\lambda'^2}$ et $-\frac{1}{\mu'^2}$ sont les racines de l'équation

$$u^2 - \frac{1}{\rho'^2}u - \frac{\rho^2}{\lambda^2\mu^2\rho'^2} = 0,$$

d'où

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{1}{\lambda'^2}\\[2ex] \dfrac{1}{\mu'^2}\end{array}\right\} = \pm\frac{1}{2\rho'^2} + \sqrt{\frac{1}{4\rho'^4} + \frac{\rho^2}{\lambda^2\mu^2\rho'^2}}.$$

L'équation correspondante en ρ' est

$$\frac{x^2-y^2}{2\rho'^2} + (x^2+y^2)\sqrt{\frac{1}{4\rho'^4} + \frac{\rho^2}{\lambda^2\mu^2\rho'^2}} - \frac{z^2}{\rho'^2} = 1,$$

qui peut s'écrire

$$4\rho'^4 + 4\left[2z^2 - x^2 + y^2 - \frac{\rho^2(x^2+y^2)^2}{\lambda^2\mu^2}\right]\rho'^2 + (2z^2 - x^2 + y^2)^2 - (x^2+y^2)^2 = 0,$$

équation du second degré en ρ'^2; donc il passe bien deux hyperboloïdes H_2 par tout point de l'espace. La surface S sur laquelle doit se trouver le point pour que ces hyperboloïdes soient confondus, a pour équation

$$\left[2z^2 - x^2 + y^2 - \frac{\rho^2(x^2+y^2)^2}{\lambda^2\mu^2}\right]^2 - (2z^2 - x^2 + y^2)^2 + (x^2+y^2)^2 = 0,$$

ou

$$-2(2z^2 - x^2 + y^2)\frac{\rho^2}{\lambda^2\mu^2} + (x^2+y^2)^2\frac{\rho^4}{\lambda^4\mu^4} + 1 = 0,$$

ou

$$(\mathrm{S}) \qquad [\rho^2(x^2+y^2) + \lambda^2\mu^2]^2 - 4\lambda^2\mu^2\rho^2(y^2+z^2) = 0.$$

On verrait de même que, par tout point de l'espace passent deux hyperboloïdes H_3, et que le lieu des points pour lesquels ils sont confondus, est la surface

$$(\mathrm{S}') \qquad [\mu^2(x^2+z^2) + \lambda^2\rho^2]^2 - 4\lambda^2\mu^2\rho^2(y^2+z^2) = 0.$$

Retranchant cette équation de la précédente, nous obtenons

$$[\rho^2(x^2+y^2)+\lambda^2\mu^2+\mu^2(x^2+z^2)+\lambda^2\rho^2]$$
$$\times[\rho^2(x^2+y^2)+\lambda^2\mu^2-\mu^2(x^2+z^2)-\lambda^2\rho^2]=0,$$

ce qui montre que l'intersection des surfaces S et S′ se compose de deux parties : une courbe imaginaire et une courbe C appartenant à la quadrique

$$\rho^2(x^2+y^2)+\lambda^2\mu^2-\mu^2(x^2+z^2)-\lambda^2\rho^2=0.$$

En tenant compte de la condition $\frac{1}{\mu^2}=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\rho^2}$, on reconnaît l'équation de H_1, de sorte que C appartient à cet hyperboloïde.

IV. L'équation de la projection Γ, sur le plan XOY, de la courbe C, s'obtient en éliminant z^2 entre l'équation ci-dessus, et celle de S, ce qui donne

$$[\rho^2(x^2+y^2)+\lambda^2\mu^2]^2$$
$$-4\lambda^2\mu^2\rho^2\left[y^2+\frac{\rho^2(x^2+y^2)-\mu^2x^2+\lambda^2(\mu^2-\rho^2)}{\mu^2}\right]=0.$$

En substituant à ρ^2 sa valeur $\frac{\lambda^2\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}$ dans cette équation, on peut la mettre sous la forme

$$(\Gamma)\quad (x^2+y^2)^2$$
$$+2[(\lambda^2-3\mu^2)x^2+(\mu^2-3\lambda^2)y^2]+(\lambda^2+\mu^2)^2=0,$$

qui représente une quartique bicirculaire qui a les axes de coordonnées pour axes de symétrie; montrons qu'elle admet deux anallagmatics.

On sait que l'enveloppe d'un cercle mobile

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+2\delta=0$$

qui coupe orthogonalement le cercle fixe

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_0 x - 2\beta_0 y + 2\delta_0 = 0 \qquad (2\delta_0 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 - R_0^2)$$

et dont le centre décrit la conique qui a pour équation tangentielle

$$F(u, v, w) = 0$$

a pour équation

$$F\left(x - \alpha_0, y - \beta_0, \delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right) = 0.$$

Dans le cas actuel, la conique déférente a une équation de la forme

$$A u^2 + A' v^2 - w^2 = 0,$$

ce qui donne pour l'enveloppe

$$A(x - \alpha_0)^2 + A'(y - \beta_0)^2 - \left(\delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 = 0$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 4(A + \delta_0)x^2 - 4(A' + \delta_0)y^2$$
$$+ 8A\alpha_0 x + 8A'\beta_0 y + 4(\delta_0^2 - A\alpha_0^2 - A'\beta_0^2) = 0.$$

En identifiant cette équation avec celle de Γ, on obtient

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0,$$
$$4\delta_0^2 \quad \text{ou} \quad R_0^4 = (\lambda^2 + \mu^2)^2,$$
$$-2(A + \delta_0) = \lambda^2 - 3\mu^2,$$
$$-2(A' + \delta_0) = \mu^2 - 3\lambda^2.$$

On en conclut :

1° $\qquad R_0^2 = \lambda^2 + \mu^2, \qquad A = 2\mu^2, \qquad A' = 2\lambda^2.$

La déférente est l'ellipse

$$2\mu^2 u^2 + 2\lambda^2 v^2 - w^2 = 0$$

ou

$$(\delta) \qquad \frac{x^2}{2\mu^2} + \frac{y^2}{2\lambda^2} - 1 = 0.$$

et le cercle fixe

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 + \mu^2.$$

2° $R_0^2 = -(\lambda^2 + \mu^2), \qquad A = \mu^2 - \lambda^2, \qquad A' = \lambda^2 - \mu^2.$

La déférente est l'hyperbole équilatère

$$(\mu^2 - \lambda^2)(u^2 - v^2) - w^2 = 0$$

ou

$$(\delta') \qquad x^2 - y^2 + \lambda^2 - \mu^2 = 0$$

et le cercle fixe

$$x^2 + y^2 = -(\lambda^2 + \mu^2).$$

L'équation de Γ en coordonnées polaires étant

$$r^4 + 2[(\lambda^2 - 3\mu^2)\cos^2\omega + (\mu^2 - 3\lambda^2)\sin^2\omega]\,r^2 + (\lambda^2 + \mu^2)^2 = 0,$$

une droite passant par l'origine coupe cette courbe en quatre points symétriques deux à deux par rapport à l'origine : $A(r')$, $A'(-r')$, $B(r'')$, $B'(-r'')$, les rayons vecteurs r' et r'' de A et B étant supposés positifs ; le milieu M de AB a pour rayon vecteur $\frac{r' + r}{2}$, et comme

$$\begin{aligned}(r' + r'')^2 &= r'^2 + r''^2 + 2r'r'' \\ &= -2[(\lambda^2 - 3\mu^2)\cos^2\omega + (\mu^2 - 3\lambda^2)\sin^2\omega] \\ &\quad + 2(\lambda^2 + \mu^2) \\ &= 8(\lambda^2 \sin^2\omega + \mu^2\cos^2\omega),\end{aligned}$$

l'équation du lieu du milieu de AB, et aussi du milieu de A′B′, est

$$r^2 = 2(\lambda^2 \sin^2\omega + \mu^2 \cos^2\mu)$$

ou

$$(\gamma) \qquad (x^2 + y^2)^2 = 2(\mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2).$$

Le milieu M′ de AB′ a de même pour rayon vecteur $\frac{r'-r''}{2}$, et comme

$$\begin{aligned}(r'-r'')^2 &= -2[(\lambda^2-3\mu^2)\cos^2\omega+(\mu^2-3\lambda^2)\sin^2\omega] \\ &\quad -2(\lambda^2+\mu^2) \\ &= -4(\lambda^2+\mu^2)(\cos^2\omega-\sin^2\omega),\end{aligned}$$

l'équation du lieu du milieu de AB', et du milieu de A'B, est

$$r^2 = -(\lambda^2-\mu^2)(\cos^2\omega-\sin^2\omega)$$

ou

$$(\gamma') \qquad (x^2+y^2)^2 = (\lambda^2-\mu^2)(y^2-x^2).$$

Ces deux courbes sont, comme Γ, des quartiques bicirculaires dont chacune admet deux symétries et deux anallagmaties.

La première (γ), qui a un point double isolé à l'origine, est la podaire de ce point par rapport à l'ellipse (δ), déférente de Γ, comme il résulte des propriétés des anallagmatiques, et aussi l'inverse de l'ellipse

$$\frac{x^2}{2\lambda^2}+\frac{y^2}{2\mu^2}-1=0$$

par rapport à l'origine, la puissance d'inversion étant $2\lambda\mu$.

La deuxième (γ'), qui a en O un point double à tangentes rectangulaires, est la podaire de ce point par rapport à l'autre déférente (δ'), et aussi l'inverse de cette hyperbole équilatère par rapport à l'origine, la puissance d'inversion étant $(\lambda^2-\mu^2)$: c'est une lemniscate de Bernoulli dont les sommets appartiennent à l'axe non focal de l'ellipse de gorge de H_1, leur distance étant égale à la distance focale de cette ellipse.