Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 122-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__122_1>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Exposer la méthode Mayer pour l'intégration des systèmes Jacobiens.*

II. *On considère une famille de surfaces dépendant de trois paramètres* a, b, c *indépendants*

$$V(x, y, z, a, b, c) = 0$$

et l'on suppose que les trois équations

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

peuvent être résolues par rapport à a, b, c *en fonction de* x, y, z, p, q. *Soient*

$$a = \varphi_1(xyzpq), \qquad b = \varphi_2(xyzpq), \qquad c = \varphi_3(xyzpq),$$

les formules de résolution. Que peut-on dire des trois crochets

$$[\varphi_1, \varphi_2], \quad [\varphi_2, \varphi_3], \quad [\varphi_3, \varphi_1]\,?$$

Quelles sont les solutions communes aux trois équations

$$[\varphi_1, f] = 0, \qquad [\varphi_2, f] = 0, \qquad [\varphi_3, f] = 0\,?$$

Peut-on obtenir facilement une intégrale complète de l'équation

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0,$$

où F *est une fonction donnée des trois fonctions* φ_1, φ_2. φ_3?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver une intégrale complète du système d'équations simultanées suivant :*

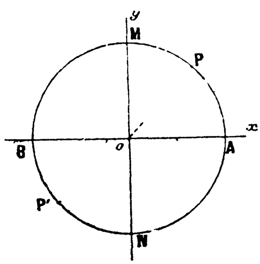
$$\begin{aligned} 2 &= p_1^2 + p_2^2 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + x_3 x_4, \\ p_3 &= x_4, \\ p_4 &= x_3. \end{aligned}$$

On rappellera d'abord la méthode générale à suivre sans aucune démonstration et on l'appliquera à cet exemple. (Juin 1912.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *et un cercle de centre* O *et de rayon* R.

Former une fonction $f(z)$ *holomorphe à l'intérieur de*



ce cercle et qui prenne sur le contour les valeurs définies par les conditions suivantes :

1° *En tout point* P *de l'arc* AMB :

$$f(z) = \textit{longueur de l'arc } \overline{\mathrm{AP}};$$

2° *En tout point* P′ *de l'arc* ANB :

$$f(z) = \text{longueur de l'arc } \overline{\mathrm{AP}'}.$$

(*Ces longueurs étant positives essentiellement et inférieures à la demi-circonférence.*)

Former le développement en série de Taylor de cette fonction dans le voisinage de l'origine et vérifier que cette série admet le cercle donné comme cercle de convergence.

En posant

$$\mathrm{F}(z) = -\frac{\pi}{2\mathrm{R}} f(z),$$

montrer que la fonction F(z) *vérifie l'équation différentielle*

$$z\frac{d^2\mathrm{F}}{dz^2} + \frac{d\mathrm{F}}{dz} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2 - z^2}.$$

En intégrant cette équation, montrer que la valeur de F(z) *peut s'exprimer au moyen d'une intégrale curviligne prise le long d'un chemin allant du point* O *au point* z *et d'un terme constant.*

Sous cette dernière forme, montrer que le domaine d'existence de F(z), *c'est-à-dire aussi de* $f(z)$, *s'étend au delà du cercle donné. Quels sont les points singuliers de la fonction* F(z)?

Quel est le domaine d'existence de cette fonction?

Quelles coupures faut-il tracer dans le plan pour rendre la fonction F(z) *holomorphe dans tout son domaine d'existence, de manière que ce domaine renferme tous les points à l'intérieur du cercle donné.*

Épreuve pratique. — 1° *Soit* A *le point du plan qui est représenté par l'affixe* $1+i$. *Calculer les différentes valeurs de l'intégrale* $\int_{\mathrm{AO}} \frac{dz}{z^4 - 1}$ *suivant la nature du chemin* OA.

Mettre en évidence les périodes.

2° *Calculer*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \log(1+x)}{(1+x^2)^3}\, dx.$$

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère deux cercles* C *et* C′ *concentriques ayant respectivement pour rayon* R *et* r. *Former une fonction* $f(x)$ *holomorphe dans la couronne circulaire et prenant pour valeur, en chaque point* M *du contour* CC′, *la valeur de la distance* MH *de ce point à un axe fixe* Ox *passant par le centre des cercles.*

Former le développement de cette fonction $f(x)$ *en série de Laurent et vérifier qu'elle satisfait à l'équation différentielle*

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} - f = \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{\mathrm{R}x^2}{\mathrm{R}^2 - x^2} + \frac{r x^2}{x^2 - r^2} - (\mathrm{R} + r) \right\}.$$

Intégrer cette équation : on en déduira le domaine d'existence de la fonction $f(x)$. *Quelles coupures faut-il tracer pour que cette fonction soit holomorphe dans tout son domaine d'existence ?*

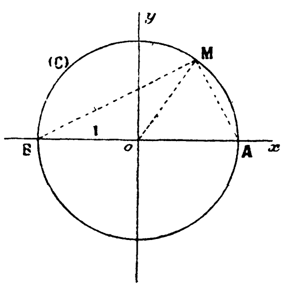
ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, par la méthode des résidus, l'intégrale définie :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1 + x^4)^2}\, dx.$$

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère un cercle* (C) *de centre* O *et de rayon égal à l'unité.*

Soient A *et* B *deux points diamétralement opposés sur la circonférence; une fonction* $f(z)$ *est holomorphe dans*



le cercle et sur le contour lui-même, et a pour valeur sur *ce contour en un point* M *l'expression*

$$f(\mathrm{M}) = \frac{5.\overline{\mathrm{MB}} - 3.i.\overline{\mathrm{MA}}}{3.\overline{\mathrm{MB}} - 5.i.\overline{\mathrm{MA}}},$$

où MA *et* MB *représentent les longueurs ordinaires avec la convention suivante pour les signes :* $\overline{\mathrm{MA}}$ *est toujours positif;* $\overline{\mathrm{MB}}$ *est positif si* M *est au-dessus de* AB *et négatif si* M *est au-dessous.*

On demande :

1° *Former le développement en série de Mac-Laurin de la fonction $f(z)$ pour un point x quelconque à l'intérieur du cercle* (C); *convergence de la série, cercle de convergence.*

2° *Trouver la somme de la série et en déduire l'expression générale de $f(z)$; vérifier que cette fonction satisfait bien aux conditions de l'énoncé. Points singuliers et domaine d'existence de cette fonction.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$$

en prenant pour détermination du radical celle qui se réduit à $+1$ pour $x = 0$.

II. *Exprimer, au moyen des fonctions elliptiques d'un paramètre les coordonnées de la courbe*

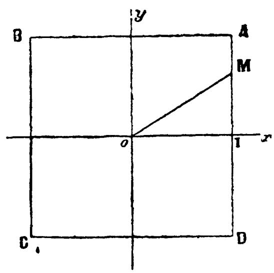
$$y^3 = x^2(x-1)^2.$$

(Juillet 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère le carré* ABCD *dont les côtés ont pour équation $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.*

Soit $f(z)$ une fonction qui, en chaque point M *du contour* ABCD, *a pour valeur le sinus de l'un des deux angles (compris entre* O *et* π) *que fait* OM *avec le côté du carré où se trouve* M.

Il est facile de voir que cette fonction est continue sur le contour, mais non analytique. Elle permet donc de *définir, au moyen d'une intégrale de Cauchy, une fonction* $F(x)$ *holomorphe à l'intérieur du carré.*



Étudier sommairement cette fonction.

Développer cette fonction en série de Taylor dans le voisinage de l'origine. Étudier le cercle de convergence de cette série et en déduire quelques points singuliers de $F(x)$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnée l'intégrale*

$$y = \int \frac{(x-2)\,dx}{(x+1)\sqrt{x^3-1}},$$

on demande d'exprimer x et y au moyen de transcendantes elliptiques p, ζ, σ d'une variable auxiliaire u.

(Novembre 1913.)

Lille.

Première question. — *Théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre.*

Deuxième question. — *Étudier la courbe représentée en coordonnées polaires par les équations*

$$r = \frac{1}{\sqrt{pu - e_2}}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\sqrt{pu - e_1}}{\sqrt{pu - e_3}},$$

p étant la fonction elliptique d'invariants 1 et 0. Rectification de la courbe. Calcul des périodes; interprétation géométrique.

(Juillet 1912.)

Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, *former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que la sphère circonscrite au tétraèdre formé par les trois plans* yOx, zOx, xOy *et le plan tangent en un point quelconque de la surface ait un rayon constant.*

Trouver une intégrale complète de cette équation.

Trouver l'équation de l'intégrale singulière. Interprétation géométrique.

On pourra effectuer dans l'équation aux dérivées partielles la transformation de Legendre.

(Novembre 1912.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère la cubique représentée par l'équation*

$$x^3 - 3\sqrt[3]{4}\,xy^2 - 4y^3 - 4y^2 - 2y = 0.$$

1° *Construire la courbe.*

2° *Exprimer les coordonnées* x, y *d'un point* M *de la cubique en fonction d'un paramètre* u, *à l'aide d'une certaine fonction* $\wp u$ *de Weierstrass et de sa dérivée* $\wp' u$. *La représentation paramétrique est-elle parfaite?*

3° *Quelles valeurs suffit-il de donner à* u *pour obtenir les points réels de la courbe? Suivre sur la cubique la marche du point* M *quand* u *prend ces valeurs.*

4° *Former la relation qui lie les paramètres de trois points de la courbe situés en ligne droite. Montrer que par un point pris sur la cubique on peut en général lui mener quatre tangentes réelles ou imaginaires distinctes de la tangente au point considéré; étudier leur réalité; calculer le rapport anharmonique de ces quatre tangentes.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Montrer que la fonction*

$$z = \frac{\sigma(u+v)}{\sigma v}\, e^{-u\zeta v}$$

vérifie l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} + uz.\wp v = 0.$$

En déduire le développement en série entière en u *de* z *considéré comme fonction de* u. *On calculera ses douze premiers coefficients en fonction de* g_2, g_3, $\wp v$, $\wp' v$.

2° *Trouver les développements en séries entières en* u *des trois fonctions* $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$, *et calculer leurs premiers coefficients en fonction de* g_2, g_3, e_1, e_2, e_3.

3° *Dire comment on obtient le développement en série entière en* u *de la fonction* σu, *sachant qu'on a*

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \ldots + c_2 u^2 + c_3 u^4 + c_4 u^6 + \ldots,$$

où les coefficients c *sont supposés connus. Calculer les premiers coefficients de ce développement.*

(Juin 1913.)

I. *On donne l'équation*

$$8u^2(u - z)^2 - (z - 1)^2 z^3 = 0$$

qui définit u *comme fonction algébrique de* z.

1° *Trouver les points singuliers de la fonction* u.

2° *Trouver la forme des développements des branches de* u *dans le domaine de chacun de ces points.*

3° *Expliquer comment on construit la surface de Riemann corrélative de l'équation donnée.*

II. *On donne l'équation*

$$(1) \qquad u^2 + 2pu + q = 0,$$

où p *désigne une constante non nulle et* q *une fonction entière de* z.

1° *Former l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre* E *à laquelle satisfont les branches de la fonction* u *de* z *définie par l'équation* (1).

2° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de l'équation* E? *Écrire l'équation déterminante relative à chacun d'eux et comparer ces points aux points singuliers de la fonction* u.

3° *Intégrer l'équation* E *directement et retrouver, par là, les racines de l'équation* (1). (Juin 1912.)

I. *Genre d'une relation algébrique de la forme*

$$u^2 = \mathrm{A}(z - e_1)(z - e_2)\ldots(z - e_n),$$

les constantes e étant distinctes.

II. *On donne l'équation différentielle linéaire homogène*

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\cos z}{z}\frac{du}{dz} + \frac{\sin z}{z^2} u = 0.$$

Trouver les deux intégrales régulières linéairement indépendantes u_1 *et* u_2, *de la forme la plus simple, qu'elle admet dans le domaine indéfini de l'origine* $z = 0$. *On calculera les quatre premiers termes de la série qui représente la plus simple* u_1 *des deux; puis, on calculera les trois premiers termes de la suite qui exprime* $\frac{u_2}{u_1}$.

(Juin 1913.)

I. *On considère la fonction algébrique u de z définie par l'équation irréductible* $\mathrm{F}(z, u) = 0$, *dont le premier membre est un polynome entier en z et u, de degré m par rapport à u. Soient* $z = z_0$, $z = a$ *deux points ordinaires de u,* u_0 *une quelconque des m racines de* $\mathrm{F}(z_0, u) = 0$ *et* $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3, \ldots, \mathrm{V}_m$ *les m racines de* $\mathrm{F}(a, u) = 0$.

Démontrer qu'il existe toujours des chemins tels que la branche de u qui, en z_0, *a la valeur* u_0, *acquière en a une quelconque des valeurs* $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3, \ldots, \mathrm{V}_m$ *assignée d'avance lorsque z va de* z_0 *en a en suivant l'un de ces chemins.*

II. *On donne l'équation différentielle linéaire homogène*

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + p\frac{du}{dz} + qu = 0,$$

où p et q sont des fonctions de z uniformes et périodiques, de période ω, *et dont l'intégrale générale est supposée uniforme.*

1° *Soient* $u_1(z)$, $u_2(z)$ *les éléments d'un système fondamental d'intégrales. De quelles formes sont les expres-*

sions de $u_1(z+\omega)$, $u_2(z+\omega)$ *en fonctions de* $u_1(z)$ *et* $u_2(z)$?

2° *Montrer qu'il existe un système fondamental d'intégrales dont les éléments se comportent simplement quand* z *passe du point* z *au point* $z+\omega$.

3° *En déduire leurs formes analytiques.*

(Octobre 1913.)

Paris.

I. *On sait que M. Darboux a donné une méthode générale d'approximation pour les fonctions de grands nombres, et l'a appliquée, en particulier, aux expressions de la forme*

$$\int_a^b f(x)[\varphi(x)]^m\,dx.$$

En supposant comme la méthode générale de M. Darboux, dont on donnera seulement l'énoncé, exposer cette application particulière sur l'exemple suivant :

$$\int_0^1 f(x)[1-x^2]^n\,dx.$$

II. 1° *Trouver le polynome* $P_m(x)$ *de degré* m, *tel qu'on ait*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_m(x)P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

2° *Quelle est la fonction de* x, *dont le développement en fonction continue algébrique conduit aux polynomes* P_m *pour les dénominales des réduites successives?*

III. *Soit un système orthogonal*

(1) $$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots,$$

pour un intervalle (a, b), *c'est-à-dire tel que*

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

et

$$\int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx = 1.$$

Démontrer que si ce système est fermé, *il est nécessairement* complet, *c'est-à-dire qu'on a*

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots,$$

$f(x)$ étant une fonction sommable et de carré sommable, et les a_n représentant les coefficients de Fourier de cette fonction relatifs au système (1).

N. B. — *On pourra s'appuyer, pour la démonstration, sur le théorème de Riesz donnant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de constantes données représente les coefficients de Fourier d'une fonction sommable.*

Épreuve pratique. — *Étant donné un système d'axes rectangulaires* (Ox, Oy, Oz), *on considère, sur la sphère de rayon* un *ayant l'origine pour centre, la fonction égale à* $+1$ *au-dessus du plan des xy et égale à* -1 *au-dessous de ce plan. Trouver son développement en fonctions Y_n de Laplace, ces fonctions étant formées avec les angles classiques θ et ψ relatifs au système d'axes donné.*

(Juillet 1912.)

Composition écrite. — I. *Trouver la limite de l'intégrale*

$$\int_{-h}^{-1} \frac{\sqrt{n}\,e^{n(z+1)}}{\sqrt{z^2-1}} f(z)\,dz, \qquad h > 1$$

quand n augmente indéfiniment en étant positif, $f(z)$ étant une fonction continue de z de $-h$ à -1.

II. 1° *On peut mettre x^n sous la forme*

$$x^n = a_n P_n + a_{n-1} P_{n-1} + \ldots + a_p P_p + \ldots + a_0 P_0,$$

les a étant des constantes et les P *des polynomes de Legendre formés avec la variable x.*

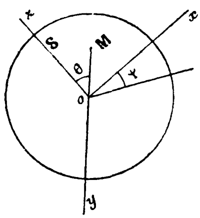
Trouver d'une manière générale la valeur a_p. L'expression trouvée ne devra pas contenir de signe d'intégrale définie.

2° *Vérifier le résultat obtenu en calculant les coefficients* *de* $\frac{1}{y^{n+1}}$ *dans les développements suivant les puissances de* $\frac{1}{y}$ *des deux membres de l'égalité classique*

$$\frac{1}{y-x} = \Sigma(2n+1)P_n(x)Q_n(y),$$

où $Q_n(y)$ *est la fonction de Legendre de seconde espèce.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère une surface sphérique*



de rayon un, *ayant l'origine pour centre dont les points* M *sont déterminés par les deux angles habituels* θ *et* ψ.

Qu'entend-on par intégrale de Poisson relative à une sphère et à une fonction donnée $f(\theta, \psi)$ *de* θ *et* ψ ?

Indiquer (sans donner de démonstration) la valeur vers laquelle tend l'intégrale de Poisson quand le point A, *dont cette intégrale est fonction, tend vers le point* S *de coordonnées* $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, *en suivant l'axe* Oz *et en étant à l'intérieur de la sphère. Faire le calcul de cette valeur limite quand*

$$f(\theta, \psi) = \cos\theta \cot\frac{1}{2}(\psi - a),$$

a étant la constante complexe $p + qi$.

(Octobre 1912.)

I. *a et b étant deux constantes positives* $(a < b)$, *on fait entre les variables* Z *et* z *la transformation*

$$Z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(b^2 - z^2)}},$$

la valeur du radical pour $z = 0$ *étant prise avec le signe* $+$, *et la variable* z *restant dans le demi-plan supérieur situé au-dessus de l'axe des quantités réelles.*

On demande quelle est dans le plan Z *la figure correspondante à ce demi-plan (on évite naturellement les points* $\pm a$, $\pm b$ *par de petites courbes situées dans le demi-plan considéré).*

II. *Soit* $R(x, y)$ *une fonction rationnelle réelle de deux variables réelles* x *et* y, *satisfaisant à l'équation de Laplace*

$$\Delta R = 0.$$

Quelle est la nature de la fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$, *qui a* $R(x, y)$ *pour partie réelle ?*

III. *On considère une aire limitée par un contour simple* C *régulièrement analytique.*

1° *Soit* $R(z)$ *une fonction rationnelle de* z, *n'ayant pas de pôle sur* C. *Montrer qu'il existe une fonction* $F(z)$ *méromorphe dans l'aire, devenant infinie comme* $R(z)$ *et prenant sur* C *des valeurs réelles.*

$F(z)$ *et* $F_1(z)$ *étant deux telles fonctions correspondant respectivement à* $R(z)$ *et* $R_1(z)$, *démontrer qu'il existe entre elles une relation algébrique*

$$f(F, F_1) = 0.$$

2° *Dans le cas particulier où*

$$R(z) = \frac{1}{z-a}, \qquad R_1(z) = \frac{i}{z-a}$$

(a correspond à un point situé dans l'aire et i est le symbole habituel des imaginaires), former explicitement cette relation algébrique et dire quelle courbe représente l'équation $f = 0$.

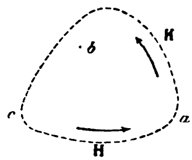
ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soient la courbe entre* u *et* v

$$v^2 = (u-a)(u-b)(u-c)$$

(a, b, c *étant trois constantes*) *et l'intégrale*

$$(1) \qquad \int \frac{du}{v}.$$

On prend pour $u = u_0$ *une des déterminations de* v



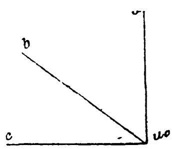
(*soit* $v = v_0$), *on trace les lacets* (*fig.* 1)

$$u_0 a, \quad u_0 b, \quad u_0 c$$

et l'on considère les expressions

$$\omega = \mathrm{A} - \mathrm{B}, \qquad \omega' = \mathrm{A} - \mathrm{C},$$

A, B, C *désignant les valeurs de l'intégrale* (1) *prises respec-*



tivement de u_0 *à* a, b, c *avec la détermination initiale pour le radical.*

ω *et* ω' *sont des fonctions de abc. Quelles modifications éprouvent-elles, quand b restant fixe, c et a se permutent de la manière indiquée par la figure* 2, *c allant en a par le chemin* $\widehat{c\mathrm{H}a}$ *et a allant en c par le chemin* $\widehat{a\mathrm{K}c}$.

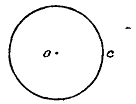
(Juillet 1913.)

I. *Soit* $\mathrm{U}(x, y)$ *une fonction harmonique uniforme dans une aire simple* A *limitée par une courbe* C. *Elle est, de plus, régulière dans cette aire, sauf peut-être en un point* O *dans le voisinage duquel on sait seulement qu'on a l'iné-*

galité

$$|U(x, y)| < M,$$

M *étant une constante fixe.*



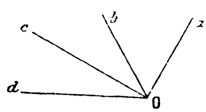
Peut-on affirmer que la fonction $U(x, y)$ *coïncide avec une fonction harmonique uniforme et* partout *régulière dans* A?

Nota. — *On pourra dans l'étude de cette question faire intervenir directement la fonction harmonique* $V(x, y)$ *associée à* $U(x, y)$.

II. *On considère l'intégrale elliptique*

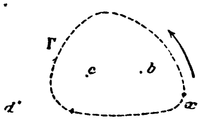
$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}$$

et l'on joint un point O *du plan aux points* a, b, c, d *comme l'indique la figure. En désignant par* A, B, C, D



les valeurs de l'intégrale prises le long des chemins correspondants, la valeur initiale du radical en O *étant la même, on sait qu'on a les deux périodes*

$$\omega_1 = 2A - 2B, \qquad \omega_2 = 2A - 2C.$$

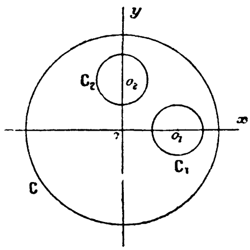


1° *Montrer que le rapport* $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ *ne peut être un nombre réel.*

2° *On remplace a par la lettre x; ω_1 et ω_2 deviennent alors des fonctions de x. On demande ce que deviennent ω_1 et ω_2 quand x partant de sa position initiale y revient après avoir décrit le chemin* T *qui entoure b et c.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On sait que la figure formée par un cercle* C *et des cercles $c_1, c_2, \ldots, c_n$ situés à son intérieur et ne se coupant pas, on peut faire correspondre un groupe* Kleinéen (*au sens de Poincaré*).

On considère en particulier un cercle C *ayant l'origine*



pour centre et un rayon égal à 2 *et deux cercles égaux* C_1 *et* C_2 *ayant respectivement leurs centres* O_1 *et* O_2 *sur* Ox *et* Oy *à une distance* 1 *de l'origine* $\left(\overline{OO_1} = \overline{OO_2} = 1\right)$. *On désigne, de plus, par a le rayon de ces cercles* $\left(\text{avec la condition } a < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ pour que les cercles ne se coupent pas}\right)$.

Quelles sont, relativement à la variable $z = x + iy$, les substitutions fondamentales du groupe Kleinéen correspondant à cette figure? (Octobre 1913.)