G. Valiron

Sur la croissance des fonctions entières d'ordre nul

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 97-110

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__97_0>

[D4a]

SUR LA CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE NUL;

PAR M. G. VALIRON.

Dans un article qui vient de paraître dans les *Rendiconti di Palermo* ([1]), M. Mattson revient sur le théorème de M. Wiman et, après avoir démontré la proposition que j'ai donnée moi-même dans un article précédent ([2]), précise le théorème de la façon suivante :

Si la série

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\log |a_n|}$$

converge, on a, dans une infinité de couronnes, l'égalité

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)=\frac{z^m}{a_1 a_2 \ldots a_m}(1+\varepsilon),$$

où m est défini par la condition

$$|a_m| < |z| < |a_{m+1}|.$$

En réalité la méthode de M. Mattson suppose que la convergence de la série (1) a été reconnue par la com-

([1]) Ruben MATTSON, *Sur les fonctions entières d'ordre zéro* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1912, 1er semestre).

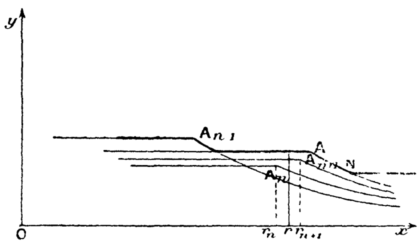
([2]) *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Nouvelles Annales*, 1911, § 5).

paraison avec les séries de Bertrand. Je me propose ici de démontrer la proposition en introduisant l'*exposant net minimum* de la suite des zéros, on verra que le théorème est encore vrai dans certains cas où la série (1) est divergente.

1. Il sera nécessaire d'expliquer brièvement la formation de la fonction que j'appelle *exposant net minimum*. Considérons la suite des zéros d'une fonction entière d'ordre nul, soient a_n le $n^{\text{ième}}$ zéro et r_n son module, la quantité

$$\sigma_n = \frac{\log n}{\log r_n}$$

tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment, et la suite des nombres $\sigma_n \log r_n$ est monotone, croissante et illimitée. Marquons dans un plan xOy, les points A_n dont



les coordonnées sont r_n et σ_n, et à chaque point A_n associons la courbe dont l'équation est

$$y_n(x) = \sigma_n, \qquad \text{pour} \qquad x \geqq r_n;$$
$$y_n(x) = \frac{\log n}{\log x}, \qquad \text{pour} \qquad x \leqq r_n,$$

cette courbe est constituée, à gauche du point A_n, par la parallèle à Ox passant par ce point; et à droite par une branche de courbe C_n partant de ce point, décroissante et asymptote à Ox. On voit que la fonction

$$y_n(x)\log x$$

est croissante à gauche de la valeur r_n, constante à droite; et que la courbe C_{n+1} est entièrement située au-dessus de la courbe C_n. Ceci posé si r est une valeur de x, comprise entre r_m et r_{m+1}, on voit facilement que, parmi les nombres $y_i(r)$,

$$(i = n_0, n_0+1, \ldots m, m+1, \ldots),$$

il y en a un $y_N(r)$, supérieur à tous les autres (ou égal à ceux d'indice moindre). La fonction $R(x)$ qui, pour chaque valeur r de x, est égale à ce nombre $y_N(r)$, est l'*exposant net minimum*. La courbe représentant cette fonction est formée d'une suite d'arcs des courbes $y_n(x)$, passant par une série de points A_{N_1}, A_{N_2}, ..., A_{N_q}, ..., les indices de ces points sont les *indices principaux*. De cette définition résultent les propriétés suivantes :

1° La fonction $R(x)$ est décroissante et constante alternativement;

2° La fonction $R(x)\log x$ croît et est constante alternativement;

3° Les nombres $R(r_n)$ sont supérieurs aux nombres σ_n pour toute valeur de n (supérieure à n_0), et égaux à σ_n pour les indices principaux;

4° La fonction $R(x)$ est la plus petite des fonctions jouissant des trois propriétés précédentes.

Il résulte également des propriétés de la fonction $R(x)$ que la fonction

$$R(x)\,x^{R(x)}$$

varie de la façon suivante : lorsque x croît de r_{N_q} à $r_{N_{q+1}}$, la fonction considérée décroît d'abord, puis croît.

2. *Hypothèse sur la croissance de r_n.* — L'hypothèse que nous ferons sur la croissance de r_n, et qui est nécessitée par la méthode de calcul est la suivante : $R(x)$ *étant l'exposant net minimum*, *on a*

$$\lim_{x=\infty} R(x)\,x^{R(x)} = 0. \tag{2}$$

Cette condition est vérifiée notamment dans le cas suivant : il existe une fonction (fonction type) $\theta(x)$ décroissante (ou non croissante), telle que la fonction $\theta(x)\log x$ croît, telle que

$$n \leqq r_n^{\theta(r_n)}, \qquad n > n_0,$$

et qui vérifie la condition (2). En effet, la fonction $R(x)$ sera alors inférieure ou égale à $\theta(x)$ pour chaque valeur de x, et vérifiera *a fortiori* la condition (2). En particulier, on voit que si la convergence de la série (1) est constatée par les critères de Bertrand, il existe une fonction $\theta(x)$ satisfaisant aux conditions (2), les conclusions que nous obtiendrons seront donc aussi générales que celles de M. Mattson. Mais on voit aussi que la condition (2) est vérifiée, par exemple, dans le cas où l'on a

$$\frac{1}{\log r_n} = \frac{1}{n \log n \log_2 n}$$

et dans ce cas la série (2) diverge; la condition de M. Mattson est donc trop restrictive.

Examinons maintenant les conséquences de l'inégalité (2); d'après le mode de croissance de la fonction

$$U(x) = R(x)\,x^{R(x)},$$

il existe une infinité d'indices principaux successifs N_q, N_{q+1}, tels que

$$U(r_{N_{q+1}}) < U(r_{N_q}),$$

sans quoi la condition (2) ne serait pas vérifiée; on aura alors dans tout l'intervalle r_{N_q}, $r_{N_{q+1}}$,

$$U(x) < U(r_{N_q}),$$

et en particulier

$$U(r_{N_q} + 1) < U(r_{N_q}), \tag{3}$$

je désignerai par **M** un indice principal jouissant de la propriété indiquée par cette inégalité, il y a une infinité de tels indices. Nous aurons donc

$$R(r_{M+1})\, r_{M+1}^{R(r_{M+1})} < R(r_M)\, r_M^{R(r_M)}: \tag{4}$$

d'autre part, puisque **M** est un indice principal, on a

$$R(r_M) = \frac{\log M}{\log r_M}, \tag{5}$$

et aussi

$$R(r_{M+1}) \geqq \frac{\log(M+1)}{\log r_{M+1}}. \tag{6}$$

En utilisant l'égalité (5) et l'inégalité (6), l'inégalité (4) devient

$$R(r_{M+1}) < \frac{M}{M+1} R(r_M);$$

or l'inégalité (6) s'écrit également

$$r_{M+1} \geqq (M+1)^{\frac{1}{R(r_{M+1})}},$$

ce qui donne, en remplaçant $\frac{1}{R(r_{M+1})}$ par la quantité $\frac{M+1}{M}\frac{1}{R(r_M)}$ qui lui est inférieure,

$$r_{M+1} \geqq (M+1)^{\frac{M+1}{M}\frac{1}{R(r_M)}} = r_M^{1+\frac{1}{M}}\left(1+\frac{1}{M}\right)^{\frac{M+1}{M}\frac{1}{R(r_M)}} > r_M^{1+\frac{1}{M}},$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad \frac{r_{M+1}}{r_M} > r_M^{\frac{1}{M}} = M^{\frac{1}{MR(r_M)}},$$

Or pour $x = r_M$ l'hypothèse (2) nous donne

$$\lim_{M=\infty} MR(r_M) = 0,$$

et par suite nous obtenons l'inégalité

$$(8) \qquad \frac{r_{M+1}}{r_M} > M^K \qquad \left(K = \frac{1}{MR(r_M)}\right),$$

valable, quelque grand que soit le nombre positif K. *pour une infinité d'indices principaux* M.

3. *Démonstration du théorème.* — La démonstration du théorème signalé au début résulte presque immédiatement de l'inégalité (8). Considérons une valeur $K_1 > 2$, et prenons

$$|z| = r = r_M M^{\frac{K_1}{2}},$$

d'où il résulte

$$\frac{r}{r_{M+1}} < \frac{1}{M^{\frac{K_1}{2}}};$$

nous avons, pour $|z| = r$,

$$(9) \quad f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$
$$= \frac{r^M}{a_1 a_2 \ldots a_M} \prod_1^M \left(1 - \frac{a_n}{z}\right) \prod_{M+1}^\infty \left(1 - \frac{z}{a_{n'}}\right).$$

Dans les deux produits qui figurent dans cette égalité, les valeurs absolues de $\frac{a_n}{z}$ et $\frac{z}{a_n}$ sont inférieures à $\frac{1}{2}$; par suite nous avons

$$\frac{1}{\left(1+\frac{r_M}{r}\right)^2} < 1 - \frac{r_M}{r} < \left|1 - \frac{a_n}{z}\right| < 1 + \frac{r_M}{r};$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{r_{n'}}\right)^2} < 1 - \frac{r}{r_{n'}} < \left|1 - \frac{z}{a_{n'}}\right| < 1 + \frac{r}{r_n};$$

d'où nous déduisons

$$(10) \qquad \left|\prod_1^M\left(1-\frac{a_n}{z}\right)\right| = e^{\alpha\sum_1^M \frac{r_M}{r}} = e^{\alpha M \frac{r_M}{r}},$$

$$(11) \qquad \left|\prod_{M+1}^\infty\left(1-\frac{z}{a_{n'}}\right)\right| = e^{\alpha_1 \sum_{M+1}^\infty \frac{r}{r_{n'}}};$$

les nombres α et α_1 étant compris entre -2 et 1. Mais d'après la définition de r, le quotient $\frac{r_M}{r}$ est égal à $M^{-\frac{K_1}{2}}$, et, par conséquent, l'égalité (10) devient

$$\left|\prod_1^M\left(1-\frac{a_n}{z}\right)\right| = 1 - \varepsilon_1;$$

le nombre ε_1 étant compris entre $-\frac{4}{M^{\frac{K_1}{2}-1}}$ et $\frac{2}{M^{\frac{K_1}{2}-1}}$ c'est-à-dire arbitrairement petit.

Passons à l'égalité (11), si nous désignons par M' — la partie entière de $r^{R(r)}$, on a

$$(13) \quad \sum_{M+1}^\infty \frac{1}{r_{n'}} = \sum_{M+1}^{M'} \frac{1}{r_{n'}} + \sum_{M'+1}^\infty \frac{1}{r_{n'}} < \frac{M'-M}{r_{M+1}} + \sum_{M'+}^\infty \frac{1}{r_{n'}};$$

mais on a bien facilement

$$\frac{1}{r_{n'}} < \frac{1}{n'^{\frac{1}{R(r)}}},$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$\sum_{M'+1}^{\infty} \frac{1}{r_{n'}} < \int_{M'}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{R(r)}}} = \frac{R(r)}{1 - R(r)} \frac{M'}{M'^{\frac{1}{R(r)}}};$$

or, d'après la définition de M', on a

$$M' > r^{R(r)} > M' - 1,$$

donc

$$\frac{1}{M'^{\frac{1}{R(r)}}} < \frac{1}{r}, \qquad M' < 1 + r^{R(r)}$$

en portant dans l'inégalité précédente, elle prendra la forme

$$\sum_{M'+1}^{\infty} \frac{1}{r_{n'}} < h R(r) \frac{r^{R(r)}}{r}, \qquad h < 2;$$

ou encore, comme $R(r) r^{R(r)}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, on aura

$$\sum_{M'+1}^{\infty} \frac{1}{r_{n'}} < \frac{\varepsilon_2}{r},$$

ε_2 étant arbitrairement petit, à condition que r_M soit suffisamment grand. Enfin, on a la suite d'inégalités suivantes

$$M' - M < M' - 1 < r^{R(r)} < r^{R(r_M)} = \left(r_M M^{\frac{K_1}{2}}\right)^{R(r_M)} = M e^{\frac{K_1}{2} R(r_M) \log M}:$$

or, de l'inégalité évidente

$$R(r_M) \log M < R(r_M) M,$$

résulte que l'exposant de e dans l'inégalité précédente reste inférieure à un, tant que $\frac{K_1}{2}$ reste inférieur à K; donc

$$\frac{M' - M}{r_{M+1}} < \frac{M}{r_{M+1}} < \frac{1}{r} \frac{M}{M^{\frac{K_1}{2}}} < \frac{\varepsilon_2}{r},$$

ε_2 étant arbitrairement petit. Dans ces conditions, on voit que l'inégalité (13) donne

$$\sum_{M+1}^{\infty} \frac{1}{r_{n'}} < \frac{2\varepsilon_2}{r},$$

et cette valeur portée dans l'égalité (11) donnera

$$\left| \prod_{M+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{n'}}\right) \right| = 1 + \varepsilon'_1,$$

le nombre ε'_1 étant compris entre $-8\varepsilon_2$ et $4\varepsilon_2$, c'est-à-dire arbitrairement petit. En résumé, on voit que, si petit que soit ε, on peut trouver M assez grand pour qu'on ait

$$\left| \prod_{1}^{M} \left(1 - \frac{a_n}{z}\right) \prod_{M+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{n'}}\right) \right| < 1 + \varepsilon,$$

le module r de z étant compris entre $r_M M^{1+s}$ et $r_M M^{\frac{k}{2}}$ $(s > 0)$. Pour de telles valeurs de z on aura donc l'égalité

$$f(z) = \frac{z^M}{a_1 a_2 \ldots a_M} [1 + \varepsilon(z)]. \tag{14}$$

La proposition en vue est ainsi démontrée.

4. Toute la démonstration précédente résulte de l'hypothèse que l'inégalité (8) a lieu pour une infinité d'indices principaux; elle exige d'ailleurs simplement que le nombre K soit supérieur à 2; on pourrait obtenir ainsi une légère extension du théorème, mais on obtiendra une extension plus importante de la façon suivante : *lorsqu'on a*

$$\lim_{n=\infty} \frac{r_n}{r_{n+1}} = 0,$$

on a pour n suffisamment grand

$$(15)\quad \prod_{2}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{z}\right)$$
$$= \frac{z^{n-1}}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\left(1-\frac{z}{a_{n+1}}\right)[1+\varepsilon(z)],$$

pour les valeurs de $|z|$ *vérifiant l'inégalité*

$$a_n \leqq |z| \leqq a_{n+1} \quad (^1).$$

On a en effet

$$(16)\qquad \left|\prod_{1}^{n-1}\left(1-\frac{a_i}{z}\right)\right| = e^{\frac{\alpha \sum_{1}^{n-1} r_i}{r}},$$

$$(17)\qquad \left|\prod_{n+2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)\right| = e^{\alpha_1 r \sum_{n+2}^{\infty} \frac{1}{r_i}},$$

les nombres α et α_1 étant compris entre -2 et 1; or, d'après l'hypothèse faite, on peut, étant donné un nombre K supérieur à 1, trouver N tel que, pour $i > N$, on ait

$$\frac{r_i}{r_{i+1}} < \frac{1}{K};$$

on aura alors

$$\sum_{1}^{n=1} r_i < N r_N + r_{n-1}\sum_{0}^{n=N} \frac{1}{K^p} < N r_N + \frac{K}{K-1} r_{n-1},$$

et par suite

$$\frac{1}{r}\sum_{1}^{n-1} r_i < \frac{N r_N}{r_n} + \frac{K}{K-1}\,\frac{r_{n-1}}{r_n},$$

---

(1) Cette proposition est donnée par M. Mattson dans le cas où $\frac{r_{n+1}}{r_n} < e^{n^a}$, $a > 0$

cette quantité tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, le produit (16) a donc pour limite un. De la même façon, on trouvera

$$\sum_{n+2}^{\infty} \frac{1}{r_i} < \frac{1}{r_{n+2}} \frac{K}{K-1},$$

le produit (17) a aussi pour limite *un* et la proposition est démontrée.

On démontrerait de même la proposition suivante : *lorsqu'on a, à partir d'une certaine valeur de n, l'inégalité*

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} < c < 1,$$

on a pour z suffisamment grand

$$(18) \qquad |f(z)| = \frac{r^{n-1}}{r_1 r_2 \ldots r_{n-1}} A \left|1 - \frac{z}{a_{n+1}}\right| \left|1 - \frac{z}{a_n}\right|,$$

où n est défini par les inégalités

$$r_n \leqq |z| = r \leqq r_{n+1},$$

et où A *est un nombre fini.*

5. Théorème de M. Wiman. — On sait que le théorème de M. Wiman relatif aux fonctions d'ordre non nul est le suivant : *Si $f(z)$ est une fonction d'ordre $\rho < \frac{1}{2}$, on a sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants l'inégalité*

$$|f(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$

ε étant arbitrairement petit. La proposition se complique nécessairement pour les fonctions d'ordre nul, pour lesquelles l'exposant de convergence est une fonction de r; elle est constituée, dans le cas général, par

l'égalité (10) de mon article déjà cité : *on a sur une infinité de cercles* (et même dans des couronnes) *de rayons indéfiniment croissants*

$$(19)\qquad |f(z)| = \left(\frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m}\right)^{1+\varepsilon} = e^{(1+\varepsilon')\int_{r_0}^{r}\frac{\psi(x)}{x}dx},$$

r étant donné par l'égalité

$$(20)\qquad r = kr_N\, e^{\frac{\alpha}{\rho(r_N)}},\qquad \alpha \text{ fini},\qquad k > 1\,;$$

et N étant un *indice principal*, $\rho(x)$ un exposant net, et $\psi(x)$ la fonction inverse d'une fonction continue, non décroissante, définie par l'égalité

$$r_x = \varphi(x).$$

On peut, d'ailleurs, tirer de l'égalité (20) une inégalité tout à fait analogue à celle trouvée par M. Wiman. On a

$$\int_{r_0}^{r}\frac{\psi(x)}{x}dx > \int_{r_N}^{r}\frac{\psi(x)}{x}dx > \mathrm{N}(\log r - \log r_N),$$

d'où, en appliquant l'égalité (20),

$$\int_{r_0}^{r}\frac{\psi(x)}{x}dx > \frac{\alpha(1+\varepsilon_1)}{\rho(r_N)}\mathrm{N} = \log r_N\, \mathrm{N}^{1-\varepsilon_2};$$

mais, de l'égalité (20), résulte également les égalités

$$\log r_N = \log r(1-\varepsilon_4),\qquad \mathrm{N} > \frac{r^{\rho(r)}}{e^{\alpha}};$$

et l'on a par suite

$$(21)\qquad |f(z)| > r^{r^{\rho(r)(1-\varepsilon)}}\quad (^1).$$

---

(1) C'est sous cette forme que j'ai démontré le théorème de M. Wiman dans mon article des *Mathematische Annalen*, t. LXX. Dans tout ce qui suit les nombres ε désignent des quantités positives, tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$ ou $\frac{1}{n}$, n'ayant aucune relation entre elles.

Cette inégalité, moins précise que l'égalité (19) met bien en évidence le théorème, si l'on remarque que l'on a, quel que soit $|z| > r_0$,

$$(22) \qquad |f(z) < e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x} dx} < r^{r^{\rho(r)}(1+\varepsilon)}.$$

L'application de l'inégalité (21) est d'ailleurs bien aisée; supposons, par exemple, que $\theta(x)$ étant une fonction décroissante, et $\theta(x) \log x$ une fonction croissante, *on ait pour* $n > n_0$

$$(23) \qquad n < r_n^{\theta(r_n)(1+\varepsilon)},$$

et pour une infinité de valeurs de n

$$(24) \qquad n > r_n^{\theta(r_n)(1-\varepsilon)},$$

et ceci quel que soit le nombre positif ε, pourvu que n soit assez grand. Il existera alors une fonction *exposant net* $\rho(x)$, vérifiant, quel que soit $x > \gamma$, les inégalités

$$\theta(x)(1-\varepsilon) < \rho(x) < \theta(x)(1+\varepsilon):$$

on aura donc, pour une infinité de valeurs de r,

$$(25) \qquad |f(z)| > r^{r^{\theta(r)(1-\varepsilon)}}$$

et, quel que soit r,

$$(26) \qquad |f(z)| < r^{r^{\theta(r)(1+\varepsilon)}}.$$

On obtiendrait toute une série de résultats en donnant à $\theta(x)$ des valeurs particulières; mais il est bien évident que l'égalité (19) qui renferme toutes ces formules, ainsi que l'inégalité (21), est beaucoup plus précise.

C'est ainsi qu'elle donnera les précisions du théorème de M. Wiman, dans certains cas de croissance irrégulière, que j'ai indiqués dans mon article cité dans la Note précédente. Mais c'est principalement dans les cas de croissance régulière que cette égalité sera utile et précisera facilement le théorème général.

Il est bien aisé de voir que, tout au contraire, la précision fournie par l'égalité (15) ne pourra guère fournir de résultats généraux, puisque, pour utiliser le résultat obtenu, il serait nécessaire de connaître en fonction simple de r l'expression

$$\frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n}$$

à $1+\varepsilon$ près, ce qui ne semble possible que pour des valeurs très particulières de $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ... Cependant l'égalité (18) peut donner des résultats intéressants; on aura, par exemple, les deux résultats suivants :

I. *Si, pour $n > n_0$, on a*

$$r_n = e^n + \varepsilon_n, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0;$$

on aura, à partir d'une certaine valeur de n,

$$|f(z)| = A\, e^{\frac{1}{2}[(\log r)^2 - \log r]} \left|1 - \frac{z}{a_{n+1}}\right| \left|1 - \frac{z}{a_n}\right|, \qquad A \text{ fini.}$$

II. *Si, pour $n > n_0$, on a*

$$r_n = e^{n^2} + \varepsilon_n, \qquad \lim \varepsilon_n = 0,$$

on aura, pour n suffisamment grand,

$$|f(z)| = A\, e^{\frac{2}{3}(\log r)^{\frac{3}{2}} - \frac{\log r}{2} + h(\log r)^{\frac{1}{2}}} \left|1 - \frac{z}{a_{n+1}}\right| \left|1 - \frac{z}{a_n}\right|.$$

On obtiendra aisément des résultats analogues.