NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

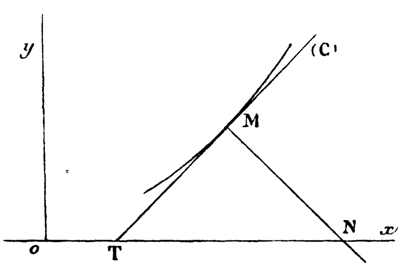
Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 472-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__472_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — *On donne deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy. *Soient* T



et N *les points de rencontre de l'axe* Ox *avec la tangente de la normale en un point* M *à une courbe* (C) *située dans le plan des deux axes.*

On demande de déterminer la courbe C *de façon que le rayon de courbure en chaque point* M *de cette courbe soit égal à la longueur* TN.

Démontrer qu'il existe deux courbes de cette espèce passant par un point donné du plan zOy, *et tangentes en ce point à une droite donnée. Indiquer la forme de ces deux courbes.*

Deuxième question. — *Soient* $y = y_1(x)$, $z = z_1(x)$ *un système particulier d'intégrales des équations* (E)

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{dy}{dx} = \mathrm{A}y + \mathrm{B}z, \qquad \frac{dz}{dx} = \mathrm{C}y + \mathrm{D}z,$$

où A, B, C, D *sont des fonctions de la variable* x. *Démontrer que les équations* (E) *admettent un autre système d'intégrales, distinct des premiers, représentées par des formules*

$$y_2 = \frac{f(x)}{z_1} + y_1 \int_{x_0}^{x} \left[\frac{\varphi(x)}{y_1^2} + \frac{\psi(x)}{z_1^2} \right] dx,$$

$$z_2 = -\frac{f(x)}{y_1} + z_1 \int_{x_0}^{x} \left[\frac{\varphi(x)}{y_1^2} + \frac{\psi(x)}{z_1^2} \right] dx,$$

les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *ne dépendant que des coefficients* A, B, C, D.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\mathrm{I}_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^m - 1} dx,$$

m étant un nombre entier positif supérieur à 3.

Cas particulier où $m = 4, 5, 6$.

(Octobre 1911.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — I. *Étude des intégrales d'une équation différentielle linéaire au voisinage d'un point singulier.*

II. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2 - 1}\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{2x}{x^2 - 1}\frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

1° *Montrer que cette équation admet une infinité de solutions de la forme*

$$t = uvw,$$

u étant une fonction de la seule variable x, v une fonction (transcendante) de la seule variable y, w une fonction (transcendante) de la seule variable z, et v et w satisfaisant respectivement aux équations linéaires

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + m^2 v = 0, \qquad \frac{d^2 w}{dz^2} - k^2 w = 0 \qquad (m \text{ et } k \text{ constantes}).$$

2° *Montrer que u est alors solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Cette équation a deux points singuliers à distance finie. Étudier la forme des intégrales u au voisinage de ces points.*

III. 1° *Développer la fonction* $y = \frac{1}{x}$ *en série trigonométrique dans l'intervalle* $-\pi, +\pi$.

2° *Trouver la somme de la série*

$$\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \ldots \qquad \text{pour} \qquad -\pi < x < \pi,$$

et démontrer que cette série converge seulement pour les valeurs réelles de x.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Intégrer l'équation aux différentielles totales*

$$(zy + z)\,dx + (z - 2x)\,dy - (x + y)\,dz = 0.$$

II. *Calculer, en appliquant la méthode des résidus, l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2}.$$

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Appelant* F(x) *une fonction* *de x holomorphe dans un cercle* S *de centre a et désignant par t une quantité telle que l'inégalité*

$$|t\,F(x)| < |x-a|$$

soit satisfaite en tous les points du contour de S, *démontrer que l'équation en x*

$$x = a + t\,F(x)$$

a une racine et une seule à l'intérieur de S.

II. *Désignant par y la racine de l'équation en x*

$$x = 1 + t\,x^2$$

qui se réduit à l'unité pour $t = 0$, montrer que cette racine est une fonction continue de t au voisinage de $t = 0$, et que l'on a

$$y^n = 1 + nt + \frac{n(n+3)}{2!}t^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{3!}t^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4!}t^4 + \ldots$$

tant que $|t| < \frac{1}{4}\cdot$

III. *Appelant* $F(x)$ *un produit de facteurs primaires de genre* 3, *et désignant par* 1, ω, ω^2 *les racines cubiques de l'unité, montrer que*

$$F(x)\,F(\omega x)\,F(\omega^2 x)$$

est une fonction entière de genre zéro *de la variable x^3 Donner un exemple.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx.$$

(Novembre 1912.)

Épreuve théorique. — I. *Définition des produits de facteurs primaires de genre p. Étudier la convergence de ces produits.*

II. *On considère une fonction réelle* $F(z)$ *nulle pour* $z = 0$ *et holomorphe pour* $|z| \leqq 1$. *Séparant dans* z *et* F *les parties réelles des parties imaginaires, on pose*

$$F(z) = P + iQ.$$

Donnant à x *une valeur réelle, fixe, moindre que* 1, *on séparera les parties réelles des parties imaginaires dans les intégrales*

$$\int \frac{F(z)}{z - x} dz \quad \text{et} \quad \int \frac{F(z)}{1 - zx} dz$$

le long du cercle C *de rayon* 1 *qui a son centre à l'origine; et l'on démontrera que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} Q(\cos\theta \sin\theta)\, d\theta = \pi F(x).$$

III. *Démontrer que l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$y'' + 3yy' + y^3 = p(x),$$

où $p(x)$ *est un polynome en* x, *est la dérivée logarithmique d'une fonction entière de* x.

Épreuve pratique. — 1° *Trouver une famille de surfaces du second ordre constituant une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad x^2 + z^2 = 2xzp + yzq.$$

2° *Trouver une famille de surfaces du second ordre constituant une intégrale complète de l'équation*

$$(2) \qquad x^2 + z^2 = 2xzp + yzq + \frac{z^2 q^2}{y^2}.$$

3° *Trouver une intégrale de l'équation* (1) *qui passe par la courbe*

$$z = 0, \qquad 4x^3 + y^4 = 0.$$

(Juin 1913.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Partie analytique. — *Le mouvement d'un point* M, *rapporté à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et ayant pour coordonnées semi-polaires* r, θ, z, *est défini par les équations différentielles*

$$\frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(z^2 + a^2)^2}{a z^2} \qquad (a \text{ constant})$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{r}{z} \frac{(a^2 - z^2)}{(a^2 + z^2)}$$

et par les coordonnées r_0, θ_0, z_0 *de la position* M_0 *que le point mobile occupe à l'instant* t_0.

1° *Trouver la relation, en termes finis, entre* r *et* z, *puis la relation en termes finis entre* t *et* z *et simplifier cette dernière en posant*

$$z = a \operatorname{tang} \varphi.$$

2° *Si, dans les relations précédemment obtenues, on regarde* t *et* t_0 *comme des constantes, on définit une correspondance entre les points* M_0 *et* M. *Montrer que, à une courbe fermée* (C_0) *située dans un plan parallèle à* xOy, *correspond une courbe fermée* (C) *située aussi dans un plan parallèle à* xOy *et que les projections des courbes* (C_0) *et* (C) *sur* xOy *sont homothétiques par rapport au point* O; *trouver la relation entre les aires* A_0 *et* A *limitées par ces courbes.*

3° *Soient* (S) *la surface engendrée par la courbe* (C), *qui vient d'être définie, quand* t *varie de* t_1 *à* t_2; (V) *le volume limité par la surface* (S) *et par les plans qui contiennent* (C) *aux instants* t_1 *et* t_2. *Calculer* V *en fonction de* a, z_0, A_0, t_1, t_2.

4° *Calculer* $\frac{dr}{dt}$ *en fonction de* r *et de* z, *puis les projections* u, v, w *de la vitesse du point* M *sur les axes* Ox, Oy, Oz.

Montrer que l'intégrale

$$\int_{(\Gamma)} u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

prise le long d'une courbe fermée (Γ) *située dans un plan parallèle à* xOy, *est nulle et que le flux du vecteur* (u, v, w) *à travers une surface fermée quelconque* (Σ) *est nul aussi.*

[*On appelle flux du vecteur* (u, v, w) *à travers une surface fermée* (Σ) *l'intégrale*

$$\int\int_{(\Sigma)} (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, d\sigma,$$

étendue à la surface Σ *où* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *désignent les cosinus directeurs de la normale extérieure à* (Σ) *en un point de l'élément* $d\sigma$.]

II. Partie géométrique. — *On considère la surface réglée* (Σ) *engendrée par les normales principales d'une courbe gauche* (Γ).

1° *Exprimer, au moyen de l'arc* s *de* (Γ) *et de la longueur* l *portée sur la normale principale à partir du point* M *de la courbe* (Γ), *les coordonnées d'un point quelconque* P *de* (Σ), *le* dS^2 *de cette surface.*

Former l'équation du plan tangent au même point, et vérifier que la normale à la surface (Σ) *au point* P *peut s'obtenir en composant un vecteur égal à* $1 - \frac{l}{R}$ *parallèle à la binormale de* (Γ) *et un vecteur* $\frac{l}{T}$ *parallèle à la tangente de* (Γ) *au point* M, R *et* T *désignant suivant l'usage les rayons de courbure et de torsion de* (Γ).

2° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de* (Σ); *montrer que si l'on pose*

$$R\rho = 1, \qquad T\tau = 1, \qquad l\lambda = 1,$$

l'intégration de l'équation différentielle obtenue pour λ *considéré comme fonction de* s *se ramène à la quadrature*

$$\int \frac{\tau \frac{d\rho}{ds} - \rho \frac{d\tau}{ds}}{2\tau^{\frac{3}{2}}}.$$

La courbe (Γ) *est ligne asymptotique de la surface* (Σ).

Épreuve pratique. — *Si l'on désigne par* δu *le premier* *membre de l'équation aux dérivées partielles*

$$\delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 :$$

1° *Vérifier que l'on a*

$$\delta(\lambda U) = \lambda \delta U + U \delta \lambda + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y},$$

λ *et* U *désignant des fonctions de* x, y, z.

2° *Soit*

$$U = F(X, Y, Z),$$

X, Y, Z *désignant des fonctions de* x, y, z; *écrire le développement de* $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial z}$ *ordonné suivant les dérivées de la fonction* $F(x, y, z)$ *par rapport aux variables* X, Y, Z.

3° *Soient*

$$u = \lambda F(X, Y, Z)$$

et

$$X = \frac{x}{z}, \qquad Y = \frac{y}{z}, \qquad Z = \frac{-1}{z}, \qquad \lambda = \frac{1}{z} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{4z}\right)};$$

vérifier que l'on a

$$\frac{1}{\lambda} \delta u \equiv \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{\partial F}{\partial Z} \right).$$

Déduire de là que, si l'on connaît une solution de l'équation $\delta u = 0$, *on peut immédiatement obtenir une seconde solution de la même équation.*

4° *Soit*

$$u = f(r, z) \qquad \text{où} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

pour que u *soit une solution de l'équation* $\delta u = 0$, *on doit avoir*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Chercher une solution de l'équation $\delta u = 0$ *qui soit de la forme*

$$u = e^{A r^2 + B},$$

A *et* B *étant des fonctions de* z. (Juin 1911.)