Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 44-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__44_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2179.

(1911, p. 96.)

Soient E *une ellipse d'axes* $2a$ *et* $2b$ *et ses deux cercles de Chasles* C *et* C', *concentriques à* E *et de rayons* $(a+b)$ *et* $(a-b)$.

Il existe une infinité de triangles MPQ *qui sont inscrits à* C *et circonscrits à* E *en* M'P'Q'.

Montrer que :

1° *Les normales à* E *en* M'P'Q' *sont concourantes et que le lieu de leur point de concours est le cercle de Chasles* C';

2° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* MPQ *est le même cercle* C';

3° *Les droites* MM′, PP′, QQ′ *sont normales à une ellipse fixe;*

4° *Les droites* PQ *et* P′Q′ *ont leur point de concours sur une Kreuzcurve.* E.-N. BARISIEN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Considérons un cercle C concentrique à une ellipse E de centre O. S'il existe un triangle inscrit à C et circonscrit à E, l'une des asympotes de E coupant C en A et A′, les tangentes à E issues de ces points seront parallèles et perpendiculaires, c'est-à-dire isotropes. Il en résulte immédiatement que l'axe radical du cercle C et d'un des foyers F de E sera une corde commune à C et aux asymptotes de E, L'axe radical de C et de F coupe le grand axe de E en α, $O\alpha = \dfrac{R^2+c^2}{2c}$, une corde commune à C et aux asymptotes de E coupe le grand axe en α' et $O\alpha' = \dfrac{Ra}{c}$, on a donc

$$R^2 - 2aR + c^2 = 0$$

ou

$$R = a \pm b.$$

Il y a, par suite, une infinité de triangles circonscrits à une ellipse et inscrits dans l'un de ces cercles de Chasles.

1° et 2°. Étant donné un triangle MPQ, nous allons déterminer les points de contact avec les côtés de ce triangle de la conique inscrite ayant pour centre le centre O du cercle C circonscrit au triangle. Soient p et q les points de C diamétralement opposés à P et Q, pq coupe MP et MQ en P_1 et Q_1, les droites QP_1 et PQ_1 se coupent en I, la droite OI coupe pq en m, contact de pq avec la conique considérée. On a

$$\frac{Q_1M}{Q_1Q}\,\frac{IQ}{IP_1}\,\frac{P_1P}{PM} = 1$$

et, aussi

$$\frac{IQ}{IP_1}\,\frac{mP_1}{mq}\,\frac{Oq}{OQ} = 1;$$

d'où, en remarquant que

$$\frac{Q_1M}{Q_1Q} = \frac{P_1M}{P_1P},$$

$$\frac{P_1M}{PM} = \frac{P_1m}{qm},$$

cette relation montre que les triangles PqP_1 et MP_1m sont semblables; d'où l'on déduit que Mm est perpendiculaire sur pq et finalement que la conique considérée touche les côtés du triangle MPQ en leurs points d'intersection avec les droites isotomiques des hauteurs. Les normales en ces points M', P', Q' sont donc concourantes en un point H' symétrique de l'orthocentre H du triangle par rapport à O.

Le cercle conjugué au triangle MPQ est harmoniquement circonscrit à la conique considérée; si ρ^2 est le carré du rayon de ce cercle, on a donc, en désignant par a et b les axes de cette conique, $\overline{OH}^2 = a^2 + b^2 + (\rho^2)$; on a aussi

$$\overline{OH}^2 = (2\rho^2) + R^2.$$

R étant le rayon du cercle MPQ, on a par suite

$$\overline{OH}^2 = 2(a^2 + b^2) - R^2$$

ou, puisque $R = a + b$, $OH = a - b$. Le lieu des points H et H' est donc le cercle de centre O et de rayon $a - b$ lorsque MPQ varie.

3° On sait que si l'on considère un point A d'une ellipse de centre O, le point A' correspondant du cercle principal de cette ellipse, la normale en A et le rayon OA' se coupent sur le cercle de centre O et de rayon $(a+b)$, a et b étant les axes de l'ellipse. Cette propriété permet d'obtenir immédiatement l'équation de la droite MM', l'ellipse E étant rapportée à ses axes. Si, en effet, les coordonnées de M sont $(a+b)\cos\varphi$, $(a+b)\sin\varphi$, celles du point M' seront $-a\cos\varphi$, $-b\sin\varphi$, la droite MM' sera

$$\frac{(a+2b)x}{\cos\varphi} - \frac{(b+2a)y}{\sin\varphi} + c^2 = 0,$$

elle est normale à l'ellipse

$$\frac{9x^2}{(a+2b)^2} + \frac{9y^2}{(b+2a)^2} - 1 = 0.$$

4° Le point de rencontre des droites PQ, P'Q' est le pôle de MM' par rapport à l'ellipse E, il décrit par suite la Kreuzcurve polaire réciproque par rapport à E de la développée de l'ellipse trouvée plus haut.

Remarques. — 1° Les hauteurs du triangle MPQ enveloppent la développée de l'ellipse E.

2° Les points MPQ sont sur une hyperbole d'Apollonius de l'ellipse E, cette hyperbole est l'inverse de la droite OH par rapport au triangle MPQ, ses asymptotes sont les droites de Simson des points d'intersection α et β de OH avec le cercle C par rapport à MPQ. Lorsque MPQ varie, ces droites restent par suite parallèles aux axes de E.

3° Les points M', P', Q' sont les points de contact d'une hypocycloïde à trois rebroussements tritangents à E. On voit que le centre de cette hypocycloïde décrit un cercle de centre O.

Autres solutions par MM. Klug et Lemaire.

2180.

(1911, p. 96.)

Démontrer la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\omega \cos 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\omega \cos 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, d\omega$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\omega}\,(1 - 4\sin^2\omega)\cos^3\omega\, d\omega,$$

posons

$$\sin\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,$$

l'intégrale devient

$$\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2\theta + 4\cos 2\theta + 3)\cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left| 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{3}\sin^3 2\theta + 2\sin 2\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$