Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 40-44

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__40_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un hémisphère creux est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe qui est fixe; cet axe est vertical, et la concavité de l'hémisphère est tournée du côté de la verticale ascendante. Un point pesant* M *se meut sans frottement sur la surface intérieure de l'hémisphère.*

I. *Établir les équations du mouvement relatif du point* M *par rapport à l'hémisphère, et indiquer les circonstances générales de ce mouvement, les conditions initiales étant quelconques.*

II. *On suppose qu'à l'époque initiale le mobile parte du sommet de l'hémisphère, et l'on demande s'il quittera l'hémisphère.*

III. *Le point* M *étant placé, à l'époque initiale, en un point quelconque de l'hémisphère, peut-on choisir la vitesse initiale relative de manière qu'il décrive un parallèle?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque homogène et pesante est limitée par deux triangles équilatéraux dont l'un est intérieur à l'autre. Les côtés de ces triangles sont parallèles deux à deux. Le côté du triangle extérieur ayant pour longueur a, la distance de deux côtés parallèles quelconques est $\dfrac{a}{4\sqrt{3}}$.*

On fait osciller cette plaque autour d'un côté du triangle extérieur; ce côté étant placé horizontalement et maintenu fixe. Quelle valeur doit avoir a pour que la durée des petites oscillations du pendule composé obtenu ainsi soit d'une seconde? (Juillet 1911.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *L'extrémité inférieure d'une barre rigide, homogène et pesante, est assujettie à glisser sans frottement sur une verticale fixe, tandis que l'extrémité supérieure de la barre est reliée à un point fixe de la même verticale par un fil sans masse, flexible et inextensible, de même longueur que la barre. A l'époque initiale, la barre fait un angle de* 60° *avec la verticale ascendante et tourne autour de cette verticale avec une vitesse angulaire donnée.*

1° *Établir les équations qui déterminent le mouvement de la barre et la tension du fil, en supposant que le fil reste tendu.*

2° *Vérifier que le fil est tendu au début, et étudier la suite du mouvement en laissant de côté l'étude de la tension.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un flotteur est constitué par un cylindre de révolution dont le rayon est* 2^{cm} *et la hauteur* 6^{cm}, *terminé à sa partie supérieure par un hémisphère de rayon égal à celui du cylindre, et à sa partie inférieure par un segment sphérique dont l'axe coïncide avec celui du cylindre, de hauteur* 1^{cm} *et de rayon* 3^{cm}. *Calculer la densité du flotteur sachant que, lorsqu'il flotte sur l'eau, son axe étant vertical, son centre de gravité se trouve sur la surface libre du liquide.* (Novembre 1911.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *A une sphère homogène de densité* $\mathcal{E}$, *de centre* C *et de rayon* R *sont soudées, aux deux extrémités* D *et* E *d'un même diamètre et suivant le prolongement de ce diamètre, deux tiges homogènes de densité* $\mathcal{E}'$, *chacune de longueur égale, au rayon de la sphère. Le solide ainsi formé est pesant.*

Les extrémités A *et* B *de ces deux tiges sont assujetties à ne pas quitter deux droites gauches fixes données* d_1 *et* d_2 *formant entre elles un angle de* 60° *et inclinées toutes deux de* 60° *sur l'horizon.*

Le centre C *est repoussé par le milieu* O *de la plus courte distance* $O_1O_2 = \delta$ *des deux droites* d_1 *et* d_2, *proportionnellement à la distance* OC. *On désignera par* μ *le rapport du poids total du solide à la répulsion exercée par* O *à l'unité de distance.*

On donne la position initiale et l'état initial des vitesses du solide envisagé. On demande d'étudier son mouvement.

Pour fixer les idées, on envisagera en particulier le cas où

$$\mathcal{C} = \frac{6}{\pi}, \qquad \mathcal{C}' = 5, \qquad R = \frac{1}{2}, \qquad \delta = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

(Juin 1910.)

Épreuve écrite. — *On imprime au tore d'un gyroscope, dont le centre est fixé relativement à la Terre, une rotation initiale autour de l'axe de ce tore.*

Si ω *est la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe et* n *la vitesse angulaire initiale de rotation du tore autour de son axe, on néglige*

$$\omega^2 \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{n}.$$

L'un des anneaux de suspension du gyroscope est fixé de façon à obliger l'axe du tore à ne pas quitter un plan horizontal fixé à la Terre.

Étudier le mouvement de l'axe du tore dans ce plan horizontal.

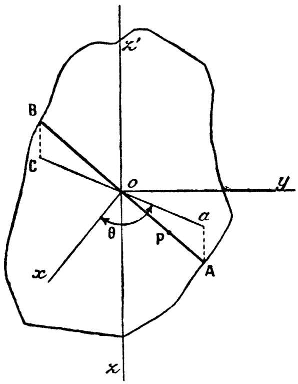
On néglige le frottement. (Octobre 1910.)

Paris.

Épreuve écrite. — *Un corps solide de masse* m *peut tourner librement, sans frottement autour d'un axe vertical fixe* Z'OZ; *dans ce corps est creusé un canal rectiligne* AOB, *de section infiniment petite rencontrant l'axe* Z'Z *en* O *et faisant, avec la verticale descendante* OZ, *un angle aigu* ZOA $= \alpha$; *un point matériel pesant* P, *de même masse* m, *peut glisser sans frottement dans ce canal.*

Trouver le mouvement du système, en supposant d'abord les conditions initiales quelconques.

Notations. — *Prenant deux axes rectangulaires horizontaux* Ox *et* Oy, *on appellera* θ *l'angle* xOa *que fait le plan vertical* BbAa *passant par* AOB *avec le plan* ZOx, r *le segment* OP *estimé positivement dans le sens* OA, *et* mK^2 *le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe* OZ.



Conditions initiales particulières. — *En appelant* r' *et* θ' *les dérivées de* r *et de* θ *par rapport à* t, *on discutera le cas où, à l'instant initial* $t = 0$, θ *et* r' *seraient nuls,* r *ayant une valeur donnée* r_0 *et* θ' *une valeur donnée* ω. *Le segment* r *va-t-il d'abord en augmentant ou en diminuant à partir de* r_0?

Trouver, en particulier, la relation qui doit exister entre r_0 *et* ω *pour que, dans le mouvement,* r *reste constant. Quelle est alors la pression du point* P *sur le corps solide ?*

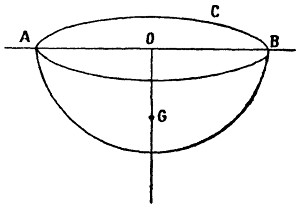
Nota. — *On ne se préoccupera pas de la longueur du canal* AOB.

Epreuve pratique. — *Étant donnée une demi-sphère homogène de rayon* R *et de diamètre* ρ *limitée par le grand cercle* ABC *de centre* O.

1° *Déterminer les axes principaux d'inertie et les moments principaux d'inertie de cette demi-sphère relatifs au point* O;

2° *Calculer la distance* OG *du centre de gravité* G *de la demi-sphère au point* O;

3° *Déterminer les axes et les moments principaux d'inertie de la demi-sphère par rapport au point* G;



4° *On fait de cette demi-sphère un pendule composé, en le suspendant autour d'un diamètre* AOB *de grand cercle de base. Ce diamètre étant horizontal et fixe. calculer la durée* T *de l'oscillation double, infiniment petite (aller et retour) de ce pendule sous l'action de la pesanteur;*

5° *Calculer* T *à* $\frac{1}{100}$ *de seconde près, en supposant (unités C. G. S.)*

$$R = 100,$$
$$g = 980.$$

(Juillet 1911.)