Nouvelles annales de mathématiques

J. Haag

Détermination des courbes planes par certaines propriétés de leur rayon de courbure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 394-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__394_1>

[O[1]2e]

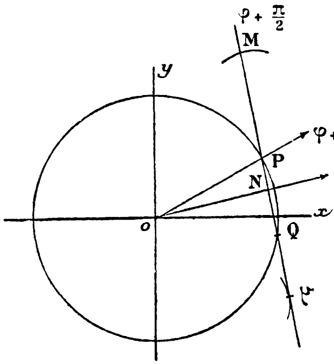
DÉTERMINATION DES COURBES PLANES PAR CERTAINES PROPRIÉTÉS DE LEUR RAYON DE COURBURE;

PAR M. J. HAAG.

1. Dans le numéro de juin 1913 des *Nouvelles Annales*, M. Turrière étudie certaines courbes définies par une propriété particulière de leur rayon de courbure et montre que leur détermination se ramène à des quadratures. Je vais indiquer une autre méthode pour

résoudre les mêmes questions ainsi que des questions beaucoup plus générales.

Premier problème. — Soit d'abord le cercle fixe de centre O et de rayon a, rencontré en P et Q par la



normale en M à une courbe (C). Soit μ le centre de courbure correspondant. M. Turrière cherche les courbes telles que $\frac{\overline{\mathrm{MP}}}{\overline{\mathrm{M}\mu}} = \text{const}$. Plus généralement, cherchons *les courbes pour lesquelles il existe une relation quelconque entre* $\overline{\mathrm{MP}}$ *et* $\overline{\mathrm{M}\mu}$, *ou*, ce qui revient au même, *entre* $\overline{\mu\mathrm{P}}$ *et* $\overline{\mu\mathrm{M}}$.

Fixons la position de NM par les angles polaires φ et $\varphi + \theta$ de ON et de OP et déterminons la relation qui doit exister entre φ et θ pour que l'on ait constamment

$$\overline{\mu\mathrm{M}} = -f(\overline{\mu\mathrm{P}}),$$

f représentant une fonction donnée.

Orientons la développée (μ) de manière que la demi-tangente positive en μ ait pour angle polaire $\varphi + \frac{\pi}{2}$. On peut choisir une origine des arcs sur cette courbe telle que l'abscisse curviligne s du point μ soit égale à $-\overline{\mu M}$. Si l'on pose alors $\overline{\mu P} = \lambda$, on aura

$$(1) \qquad s = f(\lambda).$$

Ceci étant, on a

$$(2) \qquad \overline{ON} = a \cos\theta, \qquad \overline{NP} = a \sin\theta;$$

puis

$$\overline{N\mu} = \frac{d(a\cos\theta)}{d\varphi} = -a\sin\theta\,\frac{d\theta}{d\varphi};$$

d'où

$$\lambda = \overline{\mu P} = \overline{\mu N} + \overline{NP} = a\sin\theta\left(1 + \frac{d\theta}{d\varphi}\right)$$

ou

$$(3) \qquad d\varphi = \frac{a\sin\theta\, d\theta}{\lambda - a\sin\theta}.$$

On sait maintenant la formule

$$\frac{ds}{d\varphi} = \left[a\cos\theta + \frac{d^2(a\cos\theta)}{d\varphi^2}\right].$$

En tenant compte de (3), elle devient

$$\frac{ds}{d\varphi} = +a\cos\theta\,\frac{d(\lambda - a\sin\theta)}{d\varphi},$$

ou

$$ds = -d\lambda + a\cos\theta\, d\theta + a\cos\theta\,\frac{a\sin\theta\, d\theta}{\lambda - a\sin\theta},$$

$$ds = -d\lambda + \frac{a\lambda\cos\theta\, d\theta}{\lambda - a\sin\theta}.$$

Tenant compte de (1), il vient

$$d\lambda\left[\frac{1 + f'(\lambda)}{\lambda}\right] = \frac{a\cos\theta\, d\theta}{\lambda - a\sin\theta}.$$

Si l'on pose

$$(4) \qquad g(\lambda) = \frac{1 + f'(\lambda)}{\lambda}, \qquad u = a\sin\theta,$$

cette équation s'écrit

$$\frac{du}{d\lambda} + ug(\lambda) = \lambda g(\lambda); \tag{5}$$

équation linéaire qui donnera u en fonction de λ par *deux quadratures*. En portant dans (3), on aura φ par *une nouvelle quadrature*. Finalement, *par trois quadratures, on saura exprimer* θ *et* φ *en fonction de* λ. Des calculs algébriques donneront ensuite les coordonnées de μ; d'où celles de M en observant que $\overline{\mu M} = -f(\lambda)$.

Dans le cas de M. Turrière, on a, en conservant les notations de ce géomètre,

$$f(\lambda) = \frac{1-k}{k}\lambda, \qquad g(\lambda) = \frac{1}{(1-k)\lambda}.$$

L'équation (5) s'intègre alors à vue et donne

$$u = \frac{\lambda}{2-k} + C\lambda^{\frac{1}{k-1}} \qquad (C = \text{const.}); \tag{6}$$

puis

$$\varphi = \frac{1}{1-k}\int \frac{\left[\frac{1}{2-k} + C\lambda^{\frac{2-k}{k-1}}\right] d\lambda}{\sqrt{a^2 - u^2}}. \tag{7}$$

Il ne serait sans doute pas difficile d'identifier ces résultats avec ceux de M. Turrière, en observant que les lettres φ et u ont ici la même signification qne dans son Mémoire.

2. Deuxième problème. — Soit maintenant à *déterminer une courbe telle que si* θ *et* s *désignent l'angle polaire et l'abscisse curviligne d'un de ses points et* ρ *le rayon de courbure en ce point, on ait*

$$\frac{d\theta}{ds} = f(\rho), \tag{1}$$

f désignant toujours une fonction donnée. Dans le cas où celle-ci est de la forme $a + \frac{b}{\rho}$ (a, b = const.), on retombe sur le problème examiné par M. Turrière au paragraphe 4 de son article.

Soient $\theta + V$ l'angle polaire de la demi-tangente positive et r le rayon vecteur. On a, outre la relation (1),

$$ds = \rho(d\theta + dV), \tag{2}$$

$$dr = ds \cos V, \tag{3}$$

$$r\, d\theta = ds \sin V. \tag{4}$$

Entre ces quatre équations, qui renferment cinq variables θ, s, ρ, V, r, nous allons éliminer quatre de celles-ci. Éliminons d'abord ds et $d\theta$, ce qui ne présente aucune difficulté :

$$\frac{\sin V}{2} = f(\rho), \tag{5}$$

$$\frac{dr}{\cos V} = \rho \operatorname{tang} V \frac{dr}{r} + \rho\, dV. \tag{6}$$

Enfin, éliminons r, ce qui est également très facile :

$$\frac{f\, dV - \operatorname{tang} V f' d\rho}{f^2} = \rho \left[dV + dV - \frac{f'}{f} \operatorname{tang} V\, d\rho \right],$$

ou

$$dV\left(\frac{1}{f} - 2\rho\right) = \operatorname{tang} V \frac{f'}{f}\left(\frac{1}{f} - \rho\right) d\rho,$$

ou

$$\cot V\, dV = \frac{[1 - \rho f(\rho)] f'(\rho)}{f(\rho)[1 - 2\rho f(\rho)]}\, d\rho. \tag{7}$$

Une quadrature donne donc V en fonction de ρ. Portant dans (5), on a r. Enfin, l'élimination de ds entre (1) et (2) donne

$$d\theta = \frac{\rho f(\rho)\, dV}{1 + \rho f(\rho)}; \tag{8}$$

d'où θ par une *nouvelle quadrature*.

Finalement, *on peut avoir* r, θ, V *en fonction de* ρ *par deux quadratures.*

On peut aussi effectuer les éliminations dc la manière suivante.

Éliminons ds et V; nous avons

$$(9) \qquad d\theta\left(\frac{1}{\rho f}-1\right)=dV,$$

$$(10) \qquad \cos V=f(\rho)\frac{dr}{d\theta},$$

$$(11) \qquad \sin V=rf(\rho).$$

Différentions (11), en tenant compte de (9) et (10); il vient

$$f(\rho)\frac{dr}{d\theta}d\theta\left(\frac{1}{\rho f}-1\right)=dr f(\rho)+rf'(\rho)\,d\rho,$$

ou

$$(12) \qquad \frac{dr}{r}=\frac{f'(\rho)\,d\rho}{\frac{1}{\rho}-2f(\rho)}.$$

Une quadrature donne ρ en fonction de r. Ensuite, en élevant (10) et (11) au carré et ajoutant, on a

$$(13) \qquad \theta=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{f^2(\rho)}-r^2}}.$$

Dans le cas examiné par M. Turrière, on a

$$f(\rho)=a+\frac{b}{\rho}.$$

L'équation (12) donne

$$\log r=\int\frac{df}{\frac{f-a}{b}-2f}=\int\frac{df}{f\left(\frac{1}{b}-2\right)-\frac{a}{b}}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{1}{b} - 2 = m;$$

nous avons

$$\log r = \frac{1}{m}\log\left(fm - \frac{a}{b}\right) - \frac{1}{m}\log C \qquad (C = \text{const.});$$

d'où

$$fm - \frac{a}{b} = C r^m. \tag{14}$$

Portant dans (13), il vient

$$\int \frac{\left(\frac{a}{b} + C r^m\right) dr}{\sqrt{m^2 - \left(\frac{a}{b} + C r^m\right)^2 r^2}}, \tag{15}$$

ce qui est, aux notations près, la formule (12) de M. Turrière. De plus, l'équation (4) donne la formule intéressante

$$\frac{1}{\rho} = \frac{C r^m + 2a}{1 - 2b} = \alpha r^m + \beta. \tag{16}$$