NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. KERAVAL

Surfaces engendrées par le déplacement d'une courbe plane avec cône circonscrit le long de la courbe

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[O¹5n]

SURFACES ENGENDRÉES PAR LE DÉPLACEMENT D'UNE COURBE PLANE AVEC CÔNE CIRCONSCRIT LE LONG DE LA COURBE;

PAR M. E. KERAVAL,

Professeur au lycée Louis-le-Grand.

Pour abréger, j'appelle *surface* Σ toute surface engendrée par le déplacement d'une courbe plane (C), quand il existe un cône circonscrit à la surface tout le long de chaque courbe (C). Je me servirai de coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 que je supposerai fonctions de deux paramètres u, v. Le paramètre u restera constant sur chaque courbe (C); je supposerai que les courbes obtenues en faisant v constant soient conjuguées des premières.

Je sais que dans ces conditions x_1, x_2, x_3, x_4 sont des solutions d'une même équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} + p \frac{\partial \theta}{\partial u} + q \frac{\partial \theta}{\partial v} + r\theta = 0,$$

où p, q, r sont des fonctions de u et de v. Si je désigne par (S) la courbe lieu du sommet des cônes circonscrits à Σ le long des courbes (C), les tangentes aux courbes v

rencontrent la courbe S, donc si l'on désigne par h et k les invariants de (1) savoir

$$h = \frac{\partial p}{\partial u} + pq - r,$$

$$k = \frac{\partial q}{\partial v} + pq - r,$$

l'invariant k est ici nul ; nous dirons que l'équation (1) est de rang zéro à gauche. D'autre part, les courbes u étant planes, il existe une relation de la forme

$$(2) \qquad U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_3 x_3 + U_4 x_4 \equiv 0,$$

où les coefficients de x_1, x_2, x_3, x_4 ne dépendent que de u. On sait que, dans ce cas, l'équation (1) est au plus de rang deux à droite, c'est-à-dire qu'après avoir appliqué deux fois au plus la transformation de Laplace on aura une nouvelle équation où le nouvel invariant h sera nul. Alors les équations de la surface Σ doivent être de la forme

$$(3) \qquad x_k = \begin{vmatrix} B_k & A_k & A'_k & A''_k \\ \beta_1 & \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 \end{vmatrix} \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

où les fonctions B_k, β_1, β_2, β_3 dépendent de v et A_k, α_1, α_2, α_3 de u. Mais il peut arriver que le plan des courbes u roule sur un cône; nous prendrons le sommet du cône à l'origine

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0.$$

Alors la relation (2) ne contiendra plus que trois coordonnées et l'équation (1) sera de rang un à droite, donc

$$x_k = \begin{vmatrix} B_k & A_k & A'_k \\ \beta_1 & \alpha_1 & \alpha'_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha'_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Enfin le plan des courbe u peut passer par une droite fixe. Dans ce cas, ci cette droite a pour équation

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

la relation (2) ne contient plus que les deux variables x_1, x_2, l'équation (1) est de rang zéro à droite et les équations de la surface prennent la forme

$$x_k = B_k + A_k. \tag{5}$$

Nous sommes ainsi conduits à ranger les surfaces Σ en trois catégories, nous aurons ainsi les surfaces Σ de troisième, seconde et première espèce. Dans les équations précédentes on suppose toujours qu'il n'existe pas de relation linéaire homogène à coefficients constants soit entre les quantités α, soit entre les β.

Étude des surfaces Σ de troisième espèce.

Les équations de la surface sont de la forme (3), mais il reste à exprimer que les courbes u sont planes. En portant les valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4 dans la relation (2), on trouve une relation linéaire en B_1, B_2, B_3, B_4, β_1, β_2, β_3 et homogène. En divisant par un déterminant différent de zéro, cette relation prend la forme

$$U_1 B_1 + U_2 B_2 + U_3 B_3 + U_4 B_4 + \varphi(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \equiv 0,$$

φ étant linéaire et homogène en β_1, β_2, β_3. Dans cette relation donnons à u quatre valeurs telles que le déterminant des coefficients de U_1, U_2, U_3, U_4 soit différent de zéro, ce qui est possible, puisque le plan des courbes u ne roule pas sur un cône, nous pourrons tirer pour B_1, B_2, B_3, B_4 des valeurs de la forme

$$B_k = a_k\beta_1 + b_k\beta_2 + c_k\beta_3,$$

les coefficients a_k, b_k, c_k étant des constantes. Alors en changeant la signification de A_k nous pourrons prendre, pour équations de la surface Σ,

$$(A) \qquad x_k = \begin{vmatrix} 0 & A_k & A'_k & A''_k \\ \beta_1 & \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 \end{vmatrix}$$

et cette fois les courbes u sont bien planes. La forme de ces équations nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Les courbes planes* $u =$ const. *qui engendrent la surface sont homographiques, et la correspondance homographique est établie par les courbes conjuguées* $v =$ const.

On peut imaginer par exemple dans un plan P un point de coordonnées homogènes β_1, β_2, β_3 décrivant une courbe (β). Pour chaque valeur de u on a dans un plan P_u une transformation homographique de cette courbe (β). Nous verrons plus loin si cette homographie peut devenir *singulière* pour certaines valeurs de u.

Pour le moment nous allons chercher les plans P_u et la courbe lieu du sommet des cônes circonscrits. On pourrait se servir des méthodes indiquées par M. Darboux pour des questions analogues, je préfère indiquer une méthode ne dépassant pas le cadre de la classe de Mathématiques spéciales.

Équations de la courbe (S).

Les tangentes aux courbes v rencontrent cette courbe. L'une des courbes v a pour équations

$$y_k = \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k \\ \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \end{vmatrix}.$$

Or la théorie des déterminants nous donne l'identité

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k & A'''_k \\ \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 & \alpha'''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 & \alpha'''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 & \alpha'''_3 \end{vmatrix} \times (\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1)$$
$$= \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k \\ \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha'''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha'''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha'''_3 \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A'''_k \\ \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha'''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha'''_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 \end{vmatrix}.$$

Si donc on pose

$$(B)\qquad X_k = \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k & A'''_k \\ \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 & \alpha'''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 & \alpha'''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 & \alpha'''_3 \end{vmatrix},$$

cette identité prend la forme

$$y_k \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha'''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha'''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha'''_3 \end{vmatrix} - y'_k \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 \end{vmatrix} = X_k(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1),$$

qui prouve que le point X_1, X_2, X_3, X_4 se trouve bien sur la tangente à la courbe décrite par le point y_1, y_2, y_3, y_4. Il en est de même pour deux autres courbes v

dont les coordonnées du sommet du cône sont données par les formules (B).

Plan des courbes u.

Le plan P_u d'une courbe u c'est le plan osculateur de la courbe (λ),

$$\lambda_k = A_k.$$

c'est-à-dire de la courbe décrite par le point de coordonnées A_1, A_2, A_3, A_4. Ceci résulte immédiatement de la forme des équations de la surface Σ, le plan osculateur contenant les trois points de coordonnées A_k, A'_k, A''_k.

Enveloppes des courbes u.

Un point d'une courbe u décrivant une enveloppe ne peut être que sur la caractéristique du plan P_u. Pour ces points, u et v sont liés par la relation

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \alpha'_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha'_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha'_3 \end{vmatrix} = 0,$$

que j'écrirai pour abréger

$$| \beta\alpha\alpha' | = 0.$$

Pour chaque valeur de u cette relation détermine un certain nombre de points situés sur la caractéristique du plan P_u. Soit M l'un de ces points, ses coordonnées sont fonctions de u et v qui sont eux-mêmes liés par la relation précédente. On peut supposer u et v fonctions d'un paramètre t, on aura

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x_k}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

Or pour ce point M, on a

$$x_k = -A_k|\beta\alpha'\alpha''| + A'_k|\beta\alpha\alpha''|,$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial u} = -A_k|\beta\alpha'\alpha'''| + A'_k|\beta\alpha\alpha'''| + A''_k|\beta\alpha\alpha''|,$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial v} = -A_k|\beta'\alpha'\alpha''| + A'_k|\beta'\alpha\alpha''|,$$

donc $\frac{dx_k}{dt}$ est une fonction linéaire et homogène de A_k, A'_k, A''_k. Le point de coordonnées $\frac{dx_1}{dt}\ \frac{dx_2}{dt}\ \frac{dx_3}{dt}\ \frac{dx_4}{dt}$ est donc dans le plan P_u, il en est de même de la tangente à la courbe décrite par le point M, et comme elle est dans le plan tangent à la surface elle coïncide avec la tangente à la courbe u. Donc tous les points M que nous avons définis décrivent des courbes tangentes aux courbes u. Si par exemple, β_1, β_2, β_3 sont des polynomes de degré m en v, c'est-à-dire si les courbes u sont unicursales et de degré m, on aura m enveloppes. Pour $m = 2$, on retrouve les résultats de M. Blutel. (*Annales de l'École Normale*, mai-juin 1890. *Voir* aussi la thèse de M. Lelieuvre 1894 qui s'occupe du cas d'une courbe plane unicursale se déplaçant de telle sorte qu'elle soit divisée homographiquement par ses conjuguées.)

Une transformation par polaires réciproques change une surface Σ en une surface Σ et nous montre que le cône circonscrit à Σ roule sur des développables décrites par les génératrices de contact du cône avec les plans tangents qu'on peut lui mener par la tangente à la courbe que décrit le sommet du cône.

Définition d'une congruence Σ.

Dans les équations (A) traitons β_1, β_2, β_3 comme des constantes et désignons-les par a, b, c; au lieu de

α_1, α_2, α_3 mettons α, β, γ, nous aurons les équations

$$(\mathrm{C}) \qquad x_k = \begin{vmatrix} 0 & A_k & A'_k & A''_k \\ a & \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ b & \beta & \beta' & \beta'' \\ c & \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Dans ces formules, a, b, c sont donc trois constantes arbitraires et A_1, A_2, A_3, A_4, α, β, γ des fonctions de u. Pour chaque valeur de u, les points x_k qui correspondent aux différentes valeurs a, b, c décrivent un plan P_u et les tangentes aux courbes décrites par ces points concourent en un point S

$$(\mathrm{D}) \qquad X_k = \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k & A'''_k \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix}.$$

Si a, b, c restent fixes et que u varie, les formules (C) définissent une courbe v, on a donc une congruence de courbes v et les surfaces de cette congruence sont les surfaces Σ. Il est naturel de chercher quelle peut être la surface focale de la congruence Σ. Il est évident que si pour une valeur particulière de u le point S se trouve dans le plan P_u toutes les courbes de la congruence seront tangentes à ce plan qui formera une des nappes de la surface focale. La valeur de X_k est de la forme

$$X_k = \lambda_1 A_k + \lambda_2 A'_k + \lambda_3 A''_k - \Delta A'''_k,$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

J'écris que ce point est dans le plan P_u, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 \\ A''_1 & A''_2 & A''_3 & A''_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients de λ_1, λ_2, λ_3 sont nuls et il reste

$$\Delta \times \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 \\ A''_1 & A''_2 & A''_3 & A''_4 \\ A'''_1 & A'''_2 & A'''_3 & A'''_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne : 1° les plans P_u stationnaires c'est-à-dire osculateurs stationnaires de la courbe A_k; 2° les plans P_u pour lesquels $\Delta = 0$ qui correspondent aux valeurs de u pour lesquels un point décrivant la courbe plane $x = \alpha, y = \beta,\ z = \gamma$ serait un point d'inflexion. Je vais faire voir que pour ces valeurs de u qui rendent Δ nul, toutes les courbes v sont concourantes et concourent au point S correspondant. Il suffit de se reporter à l'identité (6) où l'on tiendra compte du changement de notations. Ainsi la surface focale se compose des points qui correspondent à Δ nul et des plans P_u stationnaires. D'ailleurs il n'existe pas d'autres points focaux, car si F est un point focal et si S n'est pas dans le plan P_u correspondant, le plan tangent en F à la surface de la congruence dépendra évidemment du mode d'assemblage des courbes v.

Cas d'homographie singulière.

Supposons qu'on donne à u une valeur fixe, les formules (C) font correspondre point par point le plan P_u et un plan Q. Dans le premier on a le point x_1, x_2,

x_3, x_4; dans le deuxième, le point de coordonnées a, b, c homogènes. Il faut s'assurer que ces formules (C) permettent de tirer a, b, c en fonction de trois des variables x_k. Désignons par

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \text{l'adjoint de} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

les équations (C) s'écriront

$$\begin{aligned} x_k = &- a(A_k \alpha_1 + A'_k \alpha_2 + A''_k \alpha_3) \\ &- b(A_k \beta_1 + A'_k \beta_2 + A''_k \beta_3) \\ &- c(A_k \gamma_1 + A'_k \gamma_2 + A''_k \gamma_3), \end{aligned}$$

ce qui fait quatre équations. Pour qu'on puisse tirer a, b, c des trois premières, par exemple, il faut que

$$\begin{vmatrix} A_1\alpha_1 + A'_1\alpha_2 + A''_1\alpha_3 & A_1\beta_1 + A'_1\beta_2 + A''_1\beta_3 & A_1\gamma_1 + A'_1\gamma_2 + A''_1\gamma_3 \\ A_2\alpha_1 + A'_2\alpha_2 + A''_2\alpha_3 & A_2\beta_1 + A'_2\beta_2 + A''_2\beta_3 & A_2\gamma_1 + A'_2\gamma_2 + A''_2\gamma_3 \\ A_3\alpha_1 + A'_3\alpha_2 + A''_3\alpha_3 & A_3\beta_1 + A'_3\beta_2 + A''_3\beta_3 & A_3\gamma_1 + A'_3\gamma_2 + A''_3\gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} A_1 & A'_1 & A''_1 \\ A_2 & A'_2 & A''_2 \\ A_3 & A'_3 & A''_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si le second de ces déterminants est nul, son adjoint Δ l'est aussi et l'homographie est singulière. Pour cette valeur de u nous avons vu que les courbes v concouraient au point S correspondant. Si $\Delta \neq 0$, l'homographie ne sera singulière que si les quatre déterminants à trois lignes du Tableau

$$T : \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 \\ A''_1 & A''_2 & A''_3 & A''_4 \end{vmatrix}$$

sont nuls à la fois. Or ceci ne peut arriver que pour certaines valeurs particulières de u, car nous supposons évidemment que le point A_1, A_2, A_3, A_4 décrive une courbe gauche.

Conclusion. — Ayant choisi les fonctions A_k telles que le point A_k décrive une courbe gauche, et les fonctions α, β, γ telles qu'il n'existe pas entre elles une relation linéaire et homogène, les équations d'une surface Σ seront données par les formules (C), où a, b, c sont des fonctions arbitraires d'un paramètre v. Cela revient à choisir arbitrairement la courbe décrite par le point a, b, c dans le plan ou encore l'une des courbes u dans le plan P_u correspondant.

DEUXIÈME SOLUTION.

On arrive aux mêmes conclusions en modifiant très légèrement les formules données par M. Blutel pour le cas des coniques. Ces formules sont les suivantes :

$$x = \frac{P_1 v^2 + Q_1 v + R_1}{P\ v^2 + Q\ v + R},$$
$$y = \frac{P_2 v^2 + Q_2 v + R_2}{P\ v^2 + Q\ v + R},$$
$$z = \frac{P_3 v^2 + Q_3 v + R_3}{P\ v^2 + Q\ v + R}.$$

Les fonctions P, Q, R, P_1, ..., R_3, de la variable u étant déterminées par les équations

$$\frac{P'_1}{P'} = \frac{Q'_1}{Q'} = \frac{R'_1}{R'} = X.$$
$$\frac{P'_2}{P'} = \frac{Q'_2}{Q'} = \frac{R'_2}{R'} = Y,$$
$$\frac{P'_3}{P'} = \frac{Q'_3}{Q'} = \frac{R'_3}{R'} = Z.$$

De telle sorte qu'on peut se donner X, Y, Z sommet du cône circonscrit et P, Q, R, on aura alors $P_1, \ldots, R_3$ par neuf quadratures. Si je considère les trois courbes P, Q, R

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{P_1}{P} \\ y = \dfrac{P_2}{P} \\ z = \dfrac{P_3}{P} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{Q_1}{Q} \\ y = \dfrac{Q_2}{Q} \\ z = \dfrac{Q_3}{Q} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{R_1}{R} \\ y = \dfrac{R_2}{R} \\ z = \dfrac{R_3}{R} \end{array}\right.$$

les tangentes aux points de ces trois courbes, qui correspondent à une même valeur de u, concourent au point X, Y, Z. La congruence Σ peut alors s'écrire

$$(C') \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{aP_1 + bQ_1 + cR_1}{aP + bQ + cR}, \\ y = \dfrac{aP_2 + bQ_2 + cR_2}{aP + bQ + cR}, \\ z = \dfrac{aP_3 + bQ_3 + cR_3}{aP + bQ + cR}. \end{array}\right.$$

Si dans ces formules je donne à u une valeur particulière, la tangente au point x, y, z va passer par X, Y, Z quelles que soient les valeurs des constantes a, b, c; en effet en désignant par D l'expression $aP + bQ + cR$, on a

$$\begin{aligned} D^2 \frac{dx}{du} &= D(aP' + bQ' + cR')X \\ &\quad -(aP_1 + bQ_1 + cR_1)(aP' + bQ' + cR'), \\ D^2 \frac{dx}{du} &= \quad (aP' + bQ' + cR')(DX - Dx), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{X - x}{\dfrac{dx}{du}} = \frac{Y - y}{\dfrac{dy}{du}} = \frac{Z - z}{\dfrac{dz}{du}},$$

qui exprime la propriété indiquée. Les formules (C′) sont équivalentes aux formules (C). On peut d'ailleurs les identifier. Posons par exemple

$$P_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A'_1 & A''_1 \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}}, \qquad P = \frac{\begin{vmatrix} A_4 & A'_4 & A''_4 \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}}.$$

Nous aurons, en vertu d'une identité analogue à l'identité (6),

$$P'_1 = \begin{vmatrix} A_1 & A'_1 & A''_1 & A'''_1 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix} \times (\gamma\beta' - \beta\gamma')$$

et

$$P' = \begin{vmatrix} A_4 & A'_4 & A''_4 & A'''_4 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix} \times (\gamma\beta' - \beta\gamma').$$

On voit de suite quelles valeurs il faudrait prendre pour P_2, ... et l'on a bien

$$\frac{P'_1}{P'} = X, \qquad \ldots \qquad \text{avec} \qquad X = \frac{X_1}{X_4},$$

X_1 et X_4 étant les valeurs de la première solution.

Détermination d'une congruence Σ quand on donne la courbe lieu des sommets S et la développable enveloppe des plans P_u avec la correspondance entre les sommets et les plans.

Voici la solution avec mes formules. Je me donne les fonctions A_k et, en outre, les trois fonctions F_1, F_2,

F_3 de la variables u telles que

$$\frac{X_1}{X_4} = F_1, \qquad \frac{X_2}{X_4} = F_2, \qquad \frac{X_3}{X_4} = F_3.$$

On trouve alors, pour déterminer la fonction α, l'équation différentielle du troisième ordre

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ A_1 - F_1 A_4 & A'_1 - F_1 A'_4 & A''_1 - F_1 A''_4 & A'''_1 - F_1 A'''_4 \\ A_2 - F_2 A_4 & A'_2 - F_2 A'_4 & A''_2 - F_2 A''_4 & A'''_2 - F_2 A'''_4 \\ A_2 - F_3 A_4 & A'_3 - F_3 A'_4 & A''_3 - F_3 A''_4 & A'''_3 - F_3 A'''_4 \end{vmatrix} = 0;$$

β et γ vérifient la même équation. Je laisse au lecteur le soin de développer cette méthode; voici celle qu'on peut déduire des calculs de M. Blutel. Soit

$$Ux + Vy + Wz + 1 = 0$$

le plan P_u. On se donne U, V, W, X, Y, Z comme des fonctions de u. Il s'agit de déterminer P, Q, R, P_1, ..., R_3.

Le plan P_u contient le point $\frac{P_1}{P}$, $\frac{P_2}{P}$, $\frac{P_3}{P}$; donc

$$P + UP_1 + VP_2 + WP_3 = 0.$$

Dérivons trois fois en u et posons pour abréger

$$\begin{aligned} H &= U\,X + V\,Y + W\,Z, \\ K &= U'X + V'Y + W'Z, \\ L &= U''X + V''Y + W''Z. \end{aligned}$$

Nous aurons

$$\begin{gathered} UP_1 + VP_2 + WP_3 + P = 0, \\ U'P_1 + V'P_2 + W'P_3 + P' + P'H = 0, \\ U''P_1 + V''P_2 + W''P_3 + P'K + P'' + P''H + P'H' = 0, \\ U'''P_1 + V'''P_3 + W'''P_3 + P'L \\ P''' + P''K + P''' + H + 2P''H' + P'H'' = 0 \end{gathered}$$

L'élimination de P_1, P_2, P_3 entre ces quatre équations donne, pour déterminer P, une équation différentielle du troisième ordre; P une fois connu, les équations précédentes donnent P_1, P_2, P_3. On a des calculs identiques pour Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3. L'équation différentielle qui est linéaire et homogène par rapport à la fonction inconnue et à ses trois dérivées est d'ailleurs la même dans les trois cas. Soient donc P, Q, R trois intégrales de cette équation, les valeurs les plus générales de P, Q, R seront

$$a_1 P + b_1 Q + c_1 R,$$
$$a_2 P + b_2 Q + c_2 R.$$
$$a_3 P + b_3 Q + c_3 R;$$

d'où, pour P_1,

$$a_1 P_1 + b_1 Q_1 + c_1 R_1; \qquad \ldots,$$

d'où, en remplaçant dans les formules (C'),

$$x = \frac{a(a_1P_1+b_1Q_1+c_1R_1)+b(a_2P_1+b_2Q_1+c_2R_1)+c(a_3P_1+b_3Q_1+c_3R_1)}{a(a_1P\ +b_1Q_1+c_1R\ )+b(a_2P\ +b_2Q\ +c_2R\ )+c(a_3P\ +b_3Q\ +c_3Q\ )},$$
$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou, avec un changement de notations,

$$x = \frac{AP_1 + BQ_1 + CR_1}{AP + BQ + CR},$$
$$y = \frac{AP_2 + BQ_2 + CR_2}{AP + BQ + CR},$$
$$z = \frac{AP_3 + BQ_3 + CR_3}{AP + BQ + CR},$$

avec trois constantes A, B, C ou plutôt deux constantes, $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ par exemple. On a donc une seule congruence Σ.

Conclusion. — Il résulte de là que le problème que nous nous sommes proposé conduit exactement aux mêmes calculs que le problème analogue dans le cas des coniques. Toute la difficulté consistera à résoudre l'équation différentielle du troisième ordre.

Remarque. — Dans un article précédent j'avais considéré les surfaces Σ dans le cas où la courbe plane était indéformable, il fallait donc que cette courbe admette un groupe de transformations homographiques; on sait qu'il en est bien ainsi pour les courbes triangulaires que j'ai trouvées.

Surfaces de deuxième espèce.

Je supposerai que le plan P_u roule sur un cône ayant son sommet à l'origine.

On trouve facilement, pour la congruence Σ, les équations

$$(\mathrm{E}) \qquad x_k = \frac{\begin{vmatrix} 0 & A_k & A'_k \\ a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & A_4 & A'_4 \\ a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \end{vmatrix}} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Le sommet du cône a pour coordonnées

$$X_k = \frac{\begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_4 & A'_4 & A''_4 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \end{vmatrix}}.$$

Les plans P_u roulent sur un cône ayant pour sommet l'origine des coordonnées et contenant la courbe

$$x_k = A_k \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Avec la méthode de M. Blutel, j'adopterai les formules

$$(\mathrm{E}') \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a P_1 + b Q_1}{a P + b Q + 1}, \\ y &= \frac{a P_2 + b Q_2}{a P + b Q + 1}, \\ z &= \frac{a P_3 + b Q_3}{a P + b Q + 1}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$\frac{P'_1}{P'} = \frac{Q'_1}{Q'} = X,$$
$$\frac{P'_2}{P'} = \frac{Q'_2}{Q'} = Y,$$
$$\frac{P'_3}{P'} = \frac{Q'_3}{Q'} = Z.$$

On se donne alors X, Y, Z sommet du cône puis P, Q; on a alors P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 par six quadratures. Le plan P_u passe par l'origine et les deux points de coordonnées P_1. P_2, P_3 et Q_1, Q_2, Q_3.

Les deux points $\frac{P_1}{P}$, $\frac{P_2}{P}$, $\frac{P_3}{P}$ et $\frac{Q_1}{Q}$, $\frac{Q_2}{Q}$, $\frac{Q_3}{Q}$ décrivent deux courbes dont les tangentes se coupent au point X, Y, Z.

Avec ces notations on peut reprendre les calculs faits plus haut pour trouver la congruence Σ quand on se donne la courbe lieu des sommets des cônes et la développable enveloppe des plans P_u avec la correspondance entre les sommets et les plans, c'est-à-dire X, Y, Z, U, V, W; le plan P_u ayant pour équation

$$U_x + V_y + W_z = 0.$$

On trouve alors, pour calculer P et Q, une équation du second ordre linéaire et homogène par rapport à la fonction inconnue, et ses deux premières dérivées se ramenant par suite à une équation de Riccati.

Exemple. — On trouve un exemple intéressant en partant des surfaces Σ de révolution. Si le plan P_u roule sur un cône de révolution, S étant lié au plan, on est ramené à une équation différentielle du type suivant (Oz est l'axe du cône) qu'on est certain de pouvoir intégrer

$$y'' - \frac{2\alpha(x-a)}{1+x^2}y' + \frac{2\beta(x^2-2ax+b)}{(1+x^2)^2}y = 0,$$

où α, β, a sont des constantes et y la fonction inconnue de x. On suppose toutefois α, β liées par la relation

$$\alpha^2 + \alpha = 2\beta$$

ou

$$\beta = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}.$$

On peut ramener cette équation à la forme

$$\frac{y''}{y} = \frac{K}{(1+x^2)^2},$$

qui s'intègre facilement.

Surfaces de première espèce.

Généralisation des surfaces de translation.

Ces surfaces ont des équations de la forme

$$x_k = A_k + B_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

où les A_k sont des fonctions de u et les B_k de v. Le long des courbes u (ou v) il existe un cône circonscrit à la surface, il resterait à exprimer que les courbes u sont planes. Pour le moment je garderai ces surfaces dans toute leur généralité. On a là une généralisation des surfaces de translation. Les surfaces transformées par polaires réciproques ont été étudiées par M. Darboux au Tome I de la *Théorie des Surfaces*. Ce sont les surfaces pour lesquelles il existe deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes planes. Ici les surfaces que j'étudie sont caractérisées par ce fait qu'il existe un cône circonscrit le long de toutes les courbes du système conjugué u, v. Appelons Σ_1 ces nouvelles surfaces, nous allons en donner une définition géométrique.

Définition des surfaces Σ_1. — Donnons-nous deux courbes, l'une A décrite par le point M′

$$x' = A_1, \qquad y' = A_2, \qquad z' = A_3,$$

A_1, A_2, A_3 étant des fonctions quelconques de u. L'autre courbe B sera décrite par le point M″

$$x'' = B_1, \qquad y'' = B_2, \qquad z'' = B_3, \qquad \text{fonctions de } \mathrm{U}.$$

Donnons-nous encore deux autres fonctions A_4 et B_4 l'une de u l'autre de v et sur la droite M′M″ marquons le point M déterminé par

$$\frac{\overline{\mathrm{MM'}}}{\overline{\mathrm{MM''}}} = -\frac{A_4}{B_4}.$$

Les coordonnées du point M seront

$$(\Sigma_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{A_1 B_4 + A_4 B_1}{A_4 + B_4}, \\ y &= \frac{A_2 B_4 + A_4 B_2}{A_4 + B_4}, \\ z &= \frac{A_3 B_4 + A_4 B_3}{A_4 + B_4}. \end{aligned} \right.$$

Comme on peut écrire

$$x = \frac{\frac{A_1}{A_4} + \frac{B_1}{B_4}}{\frac{1}{A_4} + \frac{1}{B_4}},$$

on voit qu'on a bien les mêmes surfaces que celles définies plus haut.

Les courbes u se correspondent point par point et cette correspondance est établie au moyen des courbes conjuguées v. Dans les surfaces de translation les droites joignant les points correspondants de deux courbes u sont égales, parallèles et de même sens; retenons cette propriété que les droites joignant les points correspondants des courbes u (ou v) forment un cylindre. Comme généralisation je vais démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Dans les surfaces Σ_1 les droites qui joignent les points correspondants de deux courbes u (ou v) quelconques forment un cône.*

Donnons à u deux valeurs fixes et soient a et a_1 les valeurs correspondantes de la fonction A_4. Soient M' et M'_1 les positions fixes correspondantes du point M'; enfin M'' correspond à une valeur de v qu'on fera varier. On a ainsi deux positions de M : M et M_1 déterminées par

$$\frac{MM'}{MM''} = -\frac{a}{B_4}, \qquad \frac{M_1M'_1}{M_1M''} = -\frac{a_1}{B_4}.$$

Or

$$\frac{MM'}{MM''}\,\frac{M_1M''}{M_1M'_1}\,\frac{PM'_1}{PM'} = +1.$$

Donc

$$\frac{PM'}{PM'_1} = \frac{a}{a_1},$$

qui prouve que le point P est fixe.

D'autre part

$$\frac{MM'}{a} = \frac{MM''}{-B_4} = \frac{M''M'}{a+B_4},$$

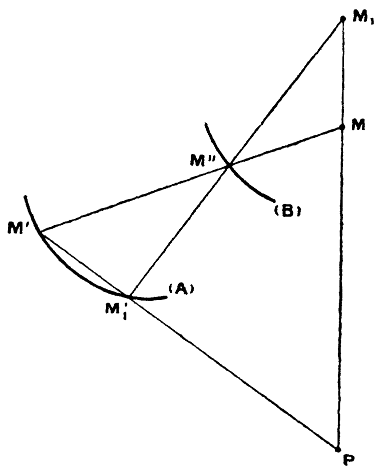
$$\frac{M_1M'_1}{a_1} = \frac{M_1M''}{-B_4} = \frac{M''M'_1}{a_1+B_4},$$

$$\frac{PM}{PM_1}\,\frac{M'_1M_1}{M_1M''}\,\frac{M'M''}{M'M} = +1.$$

Donc

$$\frac{PM}{PM_1} = \frac{a(a_1+B_4)}{a_1(a+B_4)}$$

montre que le rapport $\frac{PM}{PM_1}$ varie avec v et peut être une fonction arbitraire de cette variable.



Corollaire. — Il en résulte facilement que :

1° Trois courbes u sont situées deux à deux sur trois cônes et que les sommets des cônes sont en ligne droite;

2° Quatre courbes u sont deux à deux sur six cônes et les six sommets forment les six sommets d'un quadrilatère complet.

Surface lieu du sommet des cônes.

Sur la corde $M'M'_1$ la position du point P est définie par l'égalité

$$\frac{PM'}{PM'_1} = \frac{A_4(u)}{A_4(u_1)}$$

si M' et M'_1 correspondent respectivement aux valeurs u et u_1. Cette surface (P) est donc définie d'une façon tout à fait analogue à la surface Σ_1, avec cette différence qu'on se sert d'une seule courbe au lieu de deux et d'une seule fonction A_4. Les courbes u et u_1 tracent sur cette surface (P) un système conjugué symétrique et la courbe $u = u_1$ est le lieu des sommets des cônes circonscrits à Σ_1 le long des courbes u de cette surface. En tous les points de cette courbe $u = u_1$, les courbes u et u_1 sont tangentes. Les équations de la surface (P) sont

$$(\mathrm{P}) \qquad x = \frac{A_1(u)A_4(u_1) - A_4(u)A_1(u_1)}{A_4(u_1) - A_4(u)};$$

pour y et z on change l'indice 1 en 2 ou 3.

Cas particulier des surfaces de première espèce.

Je reviens maintenant aux surfaces Σ de première espèce, c'est-à-dire pour lesquelles le plan des courbes u passe par une droite fixe Oz, par exemple :

$$x = \frac{A_1 + B_1}{A_4 + B_4}, \qquad y = \frac{A_2 + B_2}{A_4 + B_4}, \qquad z = \frac{A_3 + B_3}{A_4 + B_4}.$$

Mais pour que $\frac{y}{x}$ dépende de u et pas de v, on montre facilement qu'il faut que B_1 et B_2 soient constants et alors on peut les supposer nuls. Un simple changement de notations conduit alors aux formules

$$x = \frac{A_1 B_4}{A_4 + B_4},$$

$$y = \frac{A_2 B_4}{A_4 + B_4}.$$

$$z = \frac{A_3 B_4 + A_4 B_3}{A_4 + B_4}$$

qui sont les formules (Σ_1) où l'on fait

$$B_1 = 0, \qquad B_2 = 0.$$

Il suffit donc de supposer que la courbe (B) décrite par le point M″ soit une droite pour avoir les nouvelles surfaces. Donc on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Des surfaces* Σ *de première espèce sont telles que deux courbes planes* u *se correspondent par homologie. Il en résulte que, si l'une de ces courbes coupe l'axe* Oz *en un certain nombre de points, les autres courbes* u *passent par les mêmes points.*

Remarque. — Pour obtenir les surfaces Σ_1 au lieu de poser

$$\frac{MM'}{MM''} = -\frac{A_4}{B_4},$$

on pourrait prendre

$$\frac{MM'}{MM''} = \frac{A_4 + K}{B_4 + K},$$

k étant une constante. Chaque valeur de k donne une surface, on a ainsi des surfaces qui se correspondent point par point avec plans tangents parallèles. On trouve ainsi un cas particulier intéressant du théorème suivant, énoncé par M. Darboux au Tome II de la *Théorie des Surfaces :*

Si l'on mène à deux surfaces S *et* S_1 *des plans tangents parallèles, la droite qui joint les points de contact engendre une congruence dont les développables interceptent sur* S *et* S_1 *un réseau conjugué.*