NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL MONTEL

Sur les critères de convergence de première et de seconde espèce dans les séries à termes positifs

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 80-93

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__80_1>

[D 2 a α]

SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ESPÈCE DANS LES SÉRIES A TERMES POSITIFS;

PAR M. PAUL MONTEL.

1. Soit u_n le terme général d'une série à termes positifs; on appelle *critères de convergence de première espèce* ceux qui ne font intervenir qu'un seul

terme de la série : c'est le cas du critère de Cauchy relatif à

$$\sqrt[n]{u_n}.$$

On appelle *critères de seconde espèce* ceux qui font intervenir deux termes : c'est le cas du critère de d'Alembert relatif à

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Un raisonnement classique montre que les suites

$$\sqrt[n]{u_n} \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

ne peuvent avoir des limites inégales. La méthode consiste à introduire la série entière

$$v_n = u_n x^n,$$

et à donner à x une valeur comprise entre $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\mu}$, λ et μ désignant respectivement les limites de $\frac{u_{n+1}}{u_{n1}}$ et de $\sqrt[n]{u_n}$. Si l'on suppose, par exemple, $\lambda < \mu$, on aura

$$\frac{1}{\lambda} > x > \frac{1}{\mu},$$

et le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ aurait une limite λx inférieure à l'unité, tandis que $\sqrt[n]{v_n}$ aurait une limite μx supérieure à l'unité. Les résultats demeurent les mêmes si l'un des nombres λ ou μ est nul ou infini.

En serrant d'un peu plus près ce même raisonnement, on peut établir d'autres propositions, plus précises, concernant les limites de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$.

Démontrons tout d'abord un théorème dû à Cauchy [1] :

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *a pour limite* λ, $\sqrt[n]{u_n}$ *a la même limite* λ.

Supposons d'abord que λ ne soit ni nul ni infini; si $\sqrt[n]{u_n}$ n'avait pas pour limite λ, il existerait un nombre ε tel que, pour une infinité de valeurs de n, l'inégalité

$$|\sqrt[n]{u_n} - \lambda| > \varepsilon$$

fût vérifiée. En d'autres termes, pour une infinité de valeurs de n, l'une au moins des inégalités

$$\sqrt[n]{u_n} > \lambda + \varepsilon, \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{u_n} < \lambda - \varepsilon \tag{2}$$

serait vérifiée : je dis que l'une et l'autre hypothèse sont impossibles. Posons $\lambda + \varepsilon = \lambda_1$, $\lambda - \varepsilon = \lambda_2$; on peut prendre ε assez petit pour que λ_2 soit positif.

Supposons que l'inégalité (1) soit satisfaite pour une infinité de valeurs de n et soit x un nombre vérifiant les inégalités

$$\frac{1}{\lambda} > x > \frac{1}{\lambda_1}.$$

Considérons de nouveau la série $v_n = u_n x^n$; le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ a pour limite $\lambda x < 1$, donc la série v_n est convergente; d'autre part, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$\sqrt[n]{v_n} > \lambda_1 x > 1,$$

ce qui montre que le terme général v_n ne pourrait

---

(1) Cauchy, *Analyse algébrique*, p. 59; *Œuvres*, 2e série, t. III, p. 63.

tendre vers zéro. La première hypothèse est donc à rejeter.

Supposons, en second lieu, que l'inégalité (2) soit satisfaite pour une infinité de valeurs de n et soit x un nombre vérifiant les inégalités

$$\frac{1}{\lambda_2} > x > \frac{1}{\lambda}.$$

Dans la série v_n, le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ a pour limite $\lambda x > 1$; donc, à partir d'un certain rang, ce rapport est supérieur à 1 et les termes vont en croissant.

D'autre part, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$\sqrt[n]{v_n} < \lambda_2 x < 1,$$
$$v_n < (\lambda_2 x)^n,$$

et, puisque $(\lambda_2 x)^n$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, il y aurait dans la série une infinité de termes aussi petits qu'on voudrait, ce qui est impossible. La seconde hypothèse est donc, elle aussi, inadmissible.

Si λ est nul, il suffit de supprimer λ_2 dans le raisonnement précédent; si λ est infini, il suffit de supprimer λ_1 et d'appeler λ_2 un nombre fini quelconque.

2. On peut obtenir un résultat plus complet en introduisant la notion de *plus grande des limites* et de *plus petite des limites* d'une suite infinie. Rappelons les définitions de ces nombres, soit

$$(3) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

une suite infinie de nombres; un nombre A sera dit une limite de la suite (3), si l'on peut extraire de cette suite une suite partielle ayant pour limite A. Le plus grand des nombres A est appelé la plus grande des limites L de la suite (3) : ce nombre peut être $+\infty$; le plus petit des nombres A est appelé la plus petite des limites de la suite (3) : ce nombre peut être $-\infty$.

Le nombre L possède les propriétés caractéristiques suivantes :

1° Il n'y a qu'un nombre fini de nombres a_n supérieurs à $L+\varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε.

2° Il y a une infinité de nombres a_n supérieurs à $L-\varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε.

La plus petite des limites est définie par des propriétés analogues. Si l'on suppose que les nombres a_n sont les abscisses des points d'une droite, la plus grande des limites sera l'abscisse du point limite le plus à droite, la plus petite des limites sera l'abscisse du point limite le plus à gauche. Nous appellerons aussi ces points la plus grande et la plus petite des limites des points a_n.

Soient λ' et λ'', respectivement, la plus petite et la plus grande des limites de la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; μ' et μ'', la plus petite et la plus grande des limites de la suite $\sqrt[n]{u_n}$, on peut énoncer la proposition suivante :

Le segment $\lambda'\lambda''$ contient le segment $\mu'\mu''$.

On a, nécessairement (*fig.* 1),

$$\lambda' < \lambda'', \quad \mu' < \mu''.$$

Il suffit donc de démontrer que

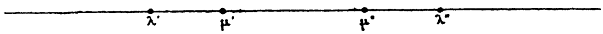
$$\mu'' \leqq \lambda'' \tag{4}$$

et

$$\lambda' \leqq \mu'. \tag{5}$$

Pour démontrer l'inégalité (4), nous pouvons d'abord

Fig. 1.



admettre que λ'' est fini, sinon le résultat serait évident. Supposons que l'on ait

$$\lambda'' < \mu'';$$

nous nous servirons toujours du même procédé de démonstration : soit x un nombre vérifiant les inégalités

$$\frac{1}{\lambda''} > x > \frac{1}{\mu''},$$

et considérons la série $v_n = u_n x^n$. Puisque λ'' est la plus grande des limites de la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, quelque petit que soit le nombre positif ε, on a, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda'' + \varepsilon$$

et, par suite,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < (\lambda'' + \varepsilon)x;$$

or, $\lambda'' x$ étant inférieur à 1, on peut prendre ε assez petit pour que

$$(\lambda' + \varepsilon)x < 1,$$

et la série v_n est convergente.

D'autre part, μ'' étant la plus grande des limites de la suite $\sqrt[n]{u_n}$, on a, pour une infinité de valeurs de n,

$$\sqrt[n]{u_n} > \mu'' - \varepsilon.$$

quelque petit que soit ε et, par suite,

$$\sqrt[n]{v_n} > (\mu'' - \varepsilon)x;$$

or, $\mu'' x$ étant supérieur à 1, on peut prendre ε assez petit pour que

$$(\mu'' - \varepsilon)x > 1,$$

et la série v_n posséderait une infinité de termes supérieurs à 1, ce qui est impossible. Donc $\mu'' \leqq \lambda''$.

Le raisonnement qui précède suppose que λ'' n'est pas nul; mais, si $\lambda'' = 0$, on a $\lambda' = \lambda'' = 0$ et l'on retombe dans le cas examiné au paragraphe précédent.

Passons à l'inégalité (5); on peut admettre que λ' n'est pas nul, sinon le résultat serait évident; on peut admettre aussi que λ' n'est pas infini, sinon λ'' étant aussi infini, on retomberait dans l'un des cas particuliers examinés précédemment. λ' étant un nombre fini non nul, supposons que l'on ait

$$\mu' < \lambda'$$

et soit x un nombre vérifiant les inégalités

$$\frac{1}{\mu'} > x > \frac{1}{\lambda'};$$

λ' étant la plus petite des limites de la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, on a, à partir d'un certain rang, quelque petit que soit le nombre positif ε,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \lambda' - \varepsilon$$

et, par suite,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > (\lambda' - \varepsilon)x.$$

Prenons ε assez petit pour que

$$(\lambda' - \varepsilon)x > 1,$$

ce qui est possible puisque $\lambda' x > 1$; à partir d'un certain rang on aura $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ et les termes de la série v_n

iront en croissant. D'autre part, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$\sqrt[n]{u_n} < \mu' + \varepsilon$$

et

$$\sqrt[n]{v_n} < (\mu' + \varepsilon)x\,;$$

si l'on prend ε assez petit pour que

$$k = (\mu' + \varepsilon)x < 1\,;$$

on voit qu'il y a dans la série v_n une infinité de termes inférieurs à k^n et, par suite, aussi petits qu'on le veut, ce qui contredit notre affirmation que les termes vont en croissant à partir d'un certain rang.

Le théorème est donc démontré : en particulier, si le segment $\lambda'\lambda''$ se réduit à zéro, il en est de même du segment $\mu'\mu''$. Mais ce dernier peut se réduire à zéro sans qu'il en soit de même du premier; en d'autres termes, $\sqrt[n]{u_n}$ peut avoir une limite unique, sans que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ possède la même propriété.

3. J'ai voulu montrer comment l'introduction de la série $u_n x^n$ permet d'arriver à des résultats très précis, mais on peut établir le théorème précédent d'une manière directe qui en fait apparaître l'énoncé comme plus naturel [1]. Nous allons voir que ce théorème résulte en définitive de ce fait que les moyennes arithmétiques des n premiers termes d'une suite infinie ont leurs valeurs limites toujours comprises entre la plus grande et la plus petite des limites de cette suite.

Soit

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n,\quad \ldots,$$

---

[1] Il est aussi bien facile de démontrer cette proposition en modifiant un peu le raisonnement même de Cauchy.

une suite infinie admettant pour plus grande des limites λ'' et pour plus petite des limites λ'. Nous supposerons, pour abréger, qu'aucune de ces limites n'est infinie; formons la suite des nombres

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n};$$

je dis que toutes les limites des b_n sont comprises entre λ' et λ''. On a, en effet, à partir d'un certain rang p,

$$\lambda' - \varepsilon < a_n < \lambda'' + \varepsilon,$$

lorsque ε est un nombre positif donné arbitrairement petit. Prenons $n > p$, on a

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{n} + \frac{a_{p+1} + \ldots + a_n}{n};$$

la seconde fraction est inférieure à

$$\lambda'' + \frac{n-p}{n}\varepsilon < \lambda'' + \varepsilon,$$

et supérieure à

$$\lambda' - \frac{n-p}{n}\varepsilon > \lambda' - \varepsilon.$$

p étant fixe, prenons n assez grand pour que

$$-\varepsilon < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{n} < +\varepsilon;$$

on aura à partir de cette valeur de n,

$$\lambda' - 2\varepsilon < b_n < \lambda'' + 2\varepsilon,$$

et puisque ε est arbitrairement petit, la proposition est démontrée.

Si l'on pose

$$a_n = \mathrm{L}\,\mathrm{A}_n,$$

on aura

$$b_n = \mathrm{L}\sqrt[n]{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_n};$$

on en déduit que le résultat précédent s'applique aux moyennes géométriques.

Pour établir le théorème que nous avons en vue, il suffit de remarquer que $\sqrt[n]{u_n}$ est la moyenne géométrique des nombres $u_1, \frac{u_2}{u_1}, \ldots, \frac{u_n}{u_{n-1}}$:

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{u_1, \frac{u_2}{u_1}, \ldots, \frac{u_n}{u_{n-1}}}.$$

4. On peut, en se plaçant au même point de vue, comparer d'autres critères de convergence de première et de seconde espèce [1].

Les règles $\sqrt[n]{u_n}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ résultent de la comparaison de la série u_n à une progression géométrique ; en comparant la série u_n à la série $\frac{1}{n^\alpha}$, on obtient le premier critère de Bertrand et la règle de Raabe-Duhamel.

Le premier critère de Bertrand conduit à étudier la suite

$$\frac{\mathrm{L}\,\frac{1}{u_n}}{\mathrm{L}n}; \tag{6}$$

la règle de Raabe-Duhamel à étudier la suite

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right). \tag{7}$$

Nous nous plaçons, bien entendu, dans le cas où $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, de même que $\sqrt[n]{u_n}$, ont pour limite l'unité.

---

[1] Je dois cette indication à M. R. Bricard.

Nous introduirons dans ce qui va suivre, au lieu des moyennes arithmétiques des termes d'une suite a_n, des valeurs moyennes plus générales; nous prendrons

$$b_n = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n},$$

les α_i étant positifs et la série $\Sigma\alpha_n$ étant divergente. Le résultat établi au paragraphe 3 subsistera; par une démonstration toute semblable, on montrera que la plus grande des limites μ'' de la suite b_n et la plus petite des limites μ' de cette suite déterminent un segment intérieur au segment $\lambda'\lambda''$ dont les extrémités sont la plus petite et la plus grande des limites de la suite a_n. Et rien ne sera modifié si l'on remplace la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

par un infiniment grand équivalent.

Or, $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1$, étant un infiniment petit équivalent à $L\,\frac{u_n}{u_{n+1}}$, les limites de la suite (7) sont les mêmes que celles de la suite

$$n\,L\,\frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

Prenons $\alpha_n = \frac{1}{n}$ et

$$b_n = \frac{\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n}}{L n},$$

puisque Ln est équivalent à

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n};$$

si

$$a_1 = L\,\frac{1}{u_1}, \qquad \ldots, \qquad a_n = n\,L\,\frac{u_{n-1}}{u_n},$$

on aura

$$b_n = \frac{L\,\frac{1}{u_n}}{Ln}.$$

Par conséquent, les limites de la suite de Bertrand sont comprises entre la plus grande et la plus petite des limites de la suite de Raabe-Duhamel. En particulier, si $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ *a une limite unique,* $\dfrac{L\,\frac{1}{u_n}}{Ln}$ *a la même limite.*

5. A chaque critère de Bertrand, on peut faire correspondre un critère de seconde espèce, comme l'a montré M. Borel (¹).

Nous allons retrouver ce résultat et démontrer en même temps le théorème suivant :

Soient $\mu'\,\mu''$ *les plus petite et plus grande des limites fournies par le* $p^{\text{ième}}$ *critère de Bertrand,* λ' *et* λ'' *les plus petite et plus grande des limites fournies par le critère de seconde espèce correspondant : le segment* $\mu'\mu''$ *est intérieur au segment* $\lambda'\lambda''$. *En particulier, si le critère de seconde espèce donne une limite unique, le critère de première espèce correspondant donnera la même limite.*

Posons

$$L_1 x = Lx, \qquad L_p x = LL_{p-1} x$$

et

$$\lambda_p(x) = x\,L_1 x\,L_2 x \ldots L_p x, \qquad \lambda_0(x) = x, \qquad \lambda_{-1}(x) = 1,$$

le $(p+2)^{\text{ième}}$ critère de Bertrand conduit à étudier les

---

(¹) E. Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 6.

limites de la suite

$$(8) \qquad b_n = \frac{\mathrm{L}\dfrac{1}{\lambda_p(n)\,u_n}}{\mathrm{L}_{p+2}(n)}.$$

Posons $\alpha_n = \dfrac{1}{\lambda_{p+1}(n)}$; la série α_n est divergente et la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

est un infiniment grand équivalent à

$$\mathrm{L}_{p+2}(n).$$

Si l'on écrit

$$b_n = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n}{\mathrm{L}_{p+2}(n)},$$

on aura

$$\alpha_n a_n = b_n \mathrm{L}_{p+2}(n) - b_{n-1}\mathrm{L}_{p+2}(n-1) = \mathrm{L}\,\frac{\lambda_p(n-1)\,u_{n-1}}{\lambda_p(n)\,u_n};$$

on est donc conduit au critère de seconde espèce fourni par la suite

$$(9) \qquad a_n = \lambda_{p+1}(n)\,\mathrm{L}\,\frac{\lambda_p(n-1)\,u_{n-1}}{\lambda_p(n)\,u_n},$$

ou par la suite équivalente [1]

$$\lambda_{p+1}(n)\,\mathrm{L}\,\frac{\lambda_p(n)\,u_n}{\lambda_p(n+1)\,u_{n+1}};$$

on peut remplacer le logarithme par l'infiniment petit équivalent

$$\frac{\lambda_p(n)\,u_n}{\lambda_p(n+1)\,u_{n+1}} - 1 = \frac{\lambda_p(n)}{\lambda_p(n+1)}\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{\lambda_p(n+1)}{\lambda_p(n)}\right],$$

ou encore par

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{\lambda_p(n+1)}{\lambda_p(n)}.$$

---

[1] Nous disons que deux suites sont équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes valeurs limites.

Nous sommes finalement conduits à étudier les limites de la suite

$$\lambda_{p+1}(n)\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{\lambda_p(n+1)}{\lambda_p(n)}\right].$$

Or, on a (1)

$$\frac{\lambda_p(n+1)}{\lambda_p(n)} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\lambda_1(n)} + \ldots + \frac{1}{\lambda_p(n)} + \frac{\theta}{n^2},$$

θ restant fini quel que soit n ; comme $\frac{\lambda_{p+1}(n)}{n^2}$ a pour limite zéro avec $\frac{1}{n}$, on peut remplacer la suite précédente par la suite

$$(10)\quad \lambda_{p+1}(n)\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{\lambda_1(n)} - \ldots - \frac{1}{\lambda_p(n)}\right].$$

Nous retrouvons le critère de seconde espèce sous la forme habituelle. Or, la suite (10) est équivalente à la suite (9) et la suite (8) est une suite de moyennes relatives à la suite (9) : notre proposition est donc établie.