NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SUCHAR

Sur les courbes invariantes par une transformation par polaires réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 544-548

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__544_1>

[P[1]2a]

SUR LES COURBES INVARIANTES PAR UNE TRANSFORMATION PAR POLAIRES RÉCIPROQUES;

PAR M. PAUL SUCHAR,

Professeur au Lycée de Pau.

1. M. Lattès, dans un intéressant article sur le même sujet, paru dans ce Recueil, juillet 1906, donne la solution de ce problème en ramenant la recherche de ces courbes à la résolution de certaines équations fonctionnelles. Ce même problème, comme nous l'avons indiqué dans notre article du mois d'octobre 1912, a été résolu à un autre point de vue par M. Appell [*Sur les courbes autopolaires* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, mai 1894)].

Je me propose, dans cette nouvelle Note, de déterminer, par des considérations élémentaires, toutes les courbes invariantes par polaires réciproques et passant par un point double de la transformation, c'est-à-dire tangentes à la conique directrice.

2. Soit

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 \tag{1}$$

le cercle directeur; si nous désignons par (r, θ), (r_1, θ_1), les coordonnées polaires d'un point M de la courbe cherchée et du point M_1, qui est le pôle correspondant à la tangente à la courbe au point M, enfin par p et p_1, les distances du centre du cercle directeur, qui est l'origine des axes, aux tangentes à la courbe aux points M et M_1; les formules de transformation sont

$$rr_1 \sin V = rp_1 = r_1 p = \lambda^2, \tag{2}$$

où V est l'angle de la tangente au point M ou M_1 avec les rayons vecteurs r et r_1. On peut se proposer de chercher la courbe qui est à elle-même sa polaire réciproque et passant par un point double sous la forme

$$f(r, p) = 0, \tag{3}$$

où f est une fonction inconnue, définissant une quelconque de ces variables en fonction de l'autre. Cette dernière équation, d'après (2), devient

$$f\left(r, \frac{\lambda^2}{r_1}\right) = 0, \tag{4}$$

et le problème se ramène à la recherche de la relation qui lie les rayons vecteurs correspondants r et r_1, issus du centre du cercle directeur, par la condition que sa courbe correspondante soit à elle-même sa polaire réciproque et soit tangente en un point de la courbe directrice. On remarque que, si la courbe définie par (3) est invariante par polaire réciproque et tangente à la courbe directrice, la relation (4) doit être nécessairement symétrique par rapport à r et r_1, et pour $r = r_1$, cette équation doit admettre une racine égale à λ. Ces conditions *nécessaires* sont *suffisantes*. En effet, soient

$$\varphi(r, r_1) = 0 \tag{5}$$

une relation symétrique entre r et r_1, admettant pour $r = r_1$ une racine égale à λ, et

$$r_1 = \psi(r) \tag{6}$$

la fonction, définissant r_1 en fonction de r. On a, comme il est bien connu,

$$\operatorname{tang} V = r\frac{d\theta}{dr},$$

et d'après (2)

$$r_1^2 = \lambda^4\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\right];$$

d'où, en ayant égard à (6),

$$\theta = \int^{r} \frac{d\frac{1}{r}}{\pm\sqrt{\frac{1}{\lambda^4}\psi^2(r) - \frac{1}{r^2}}}, \tag{7}$$

où nous avons pris pour axe polaire la droite qui passe par le point double. Cette équation est celle de la courbe cherchée. En effet, on sait que l'angle V se conserve par transformation par polaires réciproques: on a donc

$$\operatorname{tang} V = r_1\frac{d\theta_1}{dr_1},$$

et par analogie

$$r^2 = \lambda^4\left[\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{d\theta_1}\right)^2 + \frac{1}{r_1^2}\right],$$

et comme la fonction (5) est symétrique, la polaire réciproque, correspondant à la courbe donnée par l'équation (7), sera donnée par l'équation

$$\theta_1 = \int_{\lambda}^{r_1} \frac{d\frac{1}{r_1}}{\pm\sqrt{\frac{1}{\lambda^4}\psi^2(r_1) - \frac{1}{r_1^2}}},$$

qui ne diffère que par le changement de r et θ en r_1 et θ_1.

3. La méthode précédente nous conduit à des courbes invariantes et l'on aura la solution complète du problème si l'on détermine toutes les fonctions symétriques de r et r_1, et qui admettent pour $r = r_1$ la solution $r = \lambda$. Si $\omega(t)$ est une fonction donnée de la variable t, satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$\omega[\omega(t)] = t,$$

et $t = t_0$ une solution de l'équation

$$\omega(t) - t = 0,$$

on aura toutes les fonctions symétriques de r et r_1, en posant

$$(8) \qquad r = F[t, \omega(t)], \qquad r_1 = F[\omega(t), t],$$

où F est une fonction arbitraire, qui n'est pas symétrique par rapport à $\omega(t)$ et t, définie dans le domaine de $t = t_0$, et se réduisant à λ pour $t = t_0$. On remarque que, si l'on change t en $\omega(t)$, r prend la valeur r_1; par conséquent, la fonction obtenue, en éliminant t entre les deux dernières équations, est une fonction symétrique de r et r_1, admettant pour $r = r_1$ la solution $r = \lambda$. Les équations générales d'une courbe invariante sont donc

$$r = \mathrm{F}[t, \omega(t)],$$

$$\theta = \lambda^2 \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{F}[t, \omega(t)]\, d\, \dfrac{1}{\mathrm{F}[t, \omega(t)]}}{\pm\sqrt{\mathrm{F}^2[t, \omega(t)]\, \mathrm{F}^2[\omega(t), t)] - \lambda^4}}.$$

Dans le cas particulier où la fonction F est symétrique par rapport à t et $\omega(t)$, on aura la fonction particulière

$$r - r_1 = \omega,$$

à laquelle correspond d'après (7), pour courbe invariante, l'hyperbole équilatère

$$x^2 - y^2 = \lambda^2.$$

Dans les applications, la fonction $\omega(t)$ étant donnée, il suffit de prendre, pour $\omega(t)$, des fonctions élémentaires simples, exemple :

$$\omega(t) = \frac{1}{t} \qquad \text{ou} \qquad \omega(t) = -t;$$

dans ce dernier cas, comme la fonction F n'est pas symétrique en général par rapport à $\omega(t)$ et à t, les relations (8) sont de la forme

$$r = \mathrm{F}(t) - \Phi(t), \qquad r_1 = \mathrm{F}(t) + \Phi(t),$$

où F et Φ sont deux fonctions arbitraires, l'une paire, l'autre impaire, définies dans le domaine du point $t = 0$, et la première prenant la valeur λ pour $t = 0$.