Th. Leconte

L'inversion conserve les lignes de courbure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 542-544

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__542_0>

[P¹5bβ]

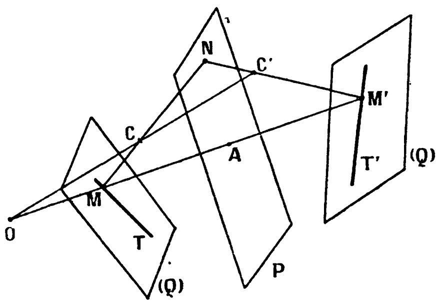
L'INVERSION CONSERVE LES LIGNES DE COURBURE;

PAR M. TH. LECONTE.

Voici une démonstration très élémentaire de cette propriété.

Soit S et S′ deux surfaces inverses; O le centre d'inversion; M et M′ deux points inverses.

On sait que les normales MN, M′N en M et M′ aux surfaces S et S′ sont symétriques par rapport au plan P



perpendiculaire à MM′ en son milieu A. Il en est de même des plans tangents Q et Q′.

Appelons tangentes correspondantes, deux droites MT, M′T′ des plans Q et Q′, qui sont dans le même plan. Il est bien clair que les tangentes en M et M′ à deux courbes inverses C et C′ tracées sur les surfaces S et S′ sont des tangentes correspondantes.

Les cercles osculateurs Γ et Γ′ aux courbes C et C′ en M et M′ sont inverses l'un de l'autre. On sait, en effet, que le cercle osculateur en un point d'une courbe est le cercle commun aux sphères osculatrices à la courbe en ce point et cette propriété se conserve par inversion.

Faisons varier la courbe C sur la surface S en laissant fixe la tangente MT. Le lieu du cercle Γ est une sphère Σ d'après le théorème de Meusnier et aussi, si la courbe C n'est pas plane, d'après cette remarque qu'elle peut être remplacée par la section plane de la surface S par son plan osculateur en M.

Pour les mêmes raisons, le lieu du cercle Γ' est aussi une sphère Σ' et les deux sphères Σ et Σ' sont inverses l'une de l'autre.

Mais les sphères Σ et Σ' ont pour centres les points C et C' centres de courbure des sections normales des surfaces S et S' par les plans NMT et NM'T'. Les points C et C' sont donc alignés avec le point O.

Je dis maintenant que si MT est une tangente principale pour la surface S, M'T' est aussi une tangente principale pour la suface S'. Faisons varier la tangente MT et par suite M'T' et montrons que MC et M'C' passeront en même temps par un maximum ou un minimum. Appliquons le théorème des transversales au triangle MM'N coupé par la sécante OCC'; nous aurons la relation

$$\frac{OM}{OM'}\cdot\frac{CN}{CM}\cdot\frac{C'M'}{C'N}=+1,$$

qui s'écrit encore

$$\frac{C'N}{C'M'}=\frac{OM}{OM'}\cdot\frac{CM}{CN},$$

et qui, jointe aux égalités

$$\frac{CN}{CM}=\frac{MN}{CM}+1,\qquad \frac{C'N}{C'M'}=\frac{M'N}{C'M'}+1,$$

montre que les tangentes principales se correspondent.

Soit une ligne de courbure L de la surface S. En chaque point M de cette ligne, la tangente MT est principale. Donc, sur la surface S′, en chaque point M′ de la ligne L′ inverse de L, la tangente M′T′ est aussi principale.

Cette démonstration montre l'intérêt qu'il y a à énoncer ainsi le théorème de Meusnier : « Le lieu des cercles osculateurs en un point M des courbes d'une surface S qui admettent une tangente donnée MT est une sphère. » Pour terminer, signalons que ce théorème, pris sous cette forme, devient immédiat si on le transforme par inversion par rapport au point M : au lieu des cercle osculateurs considérés, correspond relativement à la surface S′ inverse de S le lieu des droites asymptotes pour la direction asymptotique MT, et ce dernier lieu est le plan asymptote.