NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RENÉ GARNIER

Sur l'intégrale $\int \frac{d\theta}{1+e\cos\theta}$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 502-505

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__502_1>

[C2e]

SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{d\theta}{1+e\cos\theta}$;

PAR M. RENÉ GARNIER.

Je me propose d'indiquer dans cette Note comment on peut obtenir l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{d\theta}{1+e\cos\theta} (|e| < 1),$$

à l'aide de considérations géométriques.

1. Supposons, comme il est permis, $e > 0$, et considérons l'ellipse (E) définie en coordonnées polaires par l'équation

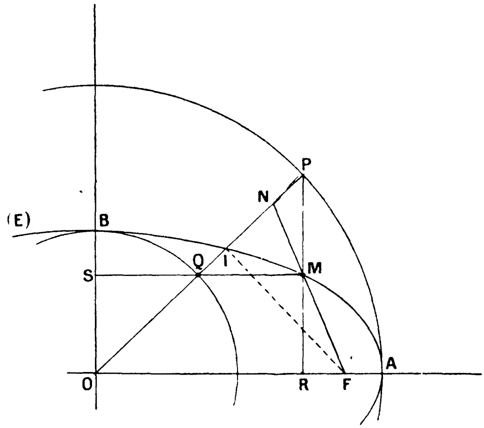
$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta};$$

il s'agit d'effectuer la quadrature $\frac{1}{p}\int r\,d\theta$. Or, soient

(1) *Gesammelte Abhandlungen* von H. MINKOWSKI, t. II. *Voir*, par exemple, les pages 215, 257, 278.

F le foyer de (E) situé au pôle des coordonnées, O le centre de (E), M un point de (E), P le point du cercle principal correspondant à M dans la transformation

Fig. 1.



homographique classique, N l'intersection de OP et FM, R et S les projections de M sur le grand axe OA et le petit axe OB, Q l'intersection de OP avec MS et I la projection de F sur OP. J'établirai d'abord la relation

$$\mathrm{ON} + \mathrm{FN} = \mathrm{OA} + \mathrm{OB}.$$

On a évidemment

$$\mathrm{ON} = \mathrm{OF}\,\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{FR} + \mathrm{QS}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{FN} = \mathrm{OF}\,\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{FR} + \mathrm{QS}};$$

or

$$\begin{aligned}\mathrm{FR} + \mathrm{QS} &= \mathrm{OF} - \mathrm{OR} + \mathrm{OR}\,\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \mathrm{OF} - \mathrm{OR}\,\frac{\mathrm{OA} - \mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\\ &= \mathrm{OF} - \mathrm{OR}\,\frac{\overline{\mathrm{OF}}^2}{(\mathrm{OA} + \mathrm{OB})\,\mathrm{OA}} = \mathrm{OF} - \mathrm{OF}\,\frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OA} + \mathrm{OB}}.\end{aligned}$$

Mais, d'après la démonstration classique de Courcelles, on a

$$\mathrm{FM} = \mathrm{PI},$$

d'où

$$OQ + FM = OA + OB - OI.$$

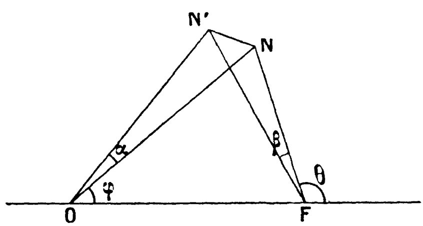
Il en résulte immédiatement

$$ON + FN = OF \frac{OA + OB - OI}{OF - \frac{OF.OI}{OA + OB}} = OA + OB.$$

C. Q. F. D.

2. Quand M décrit (E), le lieu du point N est donc une ellipse (e) de foyers O et F ([1]). Soit alors N′ un

Fig. 2.



point infiniment voisin de N sur (e) ; on a, à des infiniment petits d'ordre supérieur près :

$$\frac{\alpha.ON}{\sin \widehat{ON'N}} = NN' = \frac{\beta.FN}{\sin \widehat{FN'N}},$$

mais les angles $\widehat{ON'N}$ et $\widehat{FN'N}$ sont supplémentaires (à un infiniment petit près) en vertu de la propriété classique de la tangente à l'ellipse ; il vient donc :

$$\alpha.ON = \beta.FN,$$

([1]) On démontrerait de même que le lieu de l'intersection de FM avec la symétrique de OP par rapport à OA est une hyperbole homofocale à (e).

multipliant par $\frac{OQ}{ON}$ et employant les notations habituelles, on obtient la relation

$$b\,d\varphi = r\,d\theta. \tag{1}$$

La valeur de l'intégrale indéfinie cherchée est donc $\frac{b\varphi}{p}$ et la formule classique

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

l'exprime immédiatement en fonction de θ, si l'on préfère [1].

3. La Géométrie permet encore d'établir autrement la relation (1). Soient M′ un point de (E) infiniment voisin de M et P′ le point correspondant du cercle principal. On a :

$$r\,d\theta = 2\,\text{aire}\,\frac{\text{FMM}'}{\text{FM}} = 2\frac{\text{OB}}{\text{OA}}\,\frac{\text{aire FPP}'}{\text{FM}} = \frac{\text{OB}}{\text{OA}}\,\frac{\text{PP}'\times\text{PI}}{\text{FM}}.$$

Mais on a

$$\text{PI} = \text{FM},$$

d'où

$$r\,d\theta = \frac{\text{OB}}{\text{OA}}\,\text{PP}' = b\,d\varphi.$$

La première méthode, quoique plus longue, a sur la seconde l'avantage d'être indépendante de l'expression de l'aire d'un secteur infiniment petit et de sa projection sur un plan ; elle fait connaître, en outre, une propriété remarquable du point N.

---

[1] Rappelons qu'analytiquement la relation (1) résulte du rapprochement des équations $b\sin\varphi = r\sin\theta$ et $\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{d\theta}{\sin\theta}$, dont la seconde provient de (2) par différentiation logarithmique.