NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI LEBESGUE

# Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 12 (1912), p. 481-502

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__481_0>

[C2]

# EXPOSITION D'UN MÉMOIRE DE M. W. CROFTON (1);

PAR M. HENRI LEBESGUE

Je désire attirer l'attention des lecteurs des *Nouvelles Annales* sur des énoncés élégants qui sont à peu près ignorés en France, bien qu'ils soient susceptibles de suggérer un grand nombre d'exercices intéressants.

**1.** Soit

$$x \sin\theta - y \cos\theta - p = 0 \qquad (0 \leqq \theta < \pi) \tag{1}$$

l'équation d'une droite D en coordonnées rectangulaires.

(1) *Philosophical Transactions*, 1868, *Comptes rendus*, t. LXV, et LXVIII.

J.-A. Serret a vérifié les deux principaux énoncés de Crofton (*Comptes rendus*, t. LXVIII, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1869).

On trouvera un exposé des raisonnements de Crofton dans un Ouvrage de E. Czuber dont une traduction belge, intitulée : *Probabilités et moyennes géométriques*, a été publiée chez Hermann. Crofton obtient ses résultats en utilisant les théorèmes généraux sur les probabilités pour le calcul de certaines probabilités géométriques, cela le conduit en somme tout simplement à évaluer des intégrales multiples par des changements de variables. Ici, je suis exactement les raisonnements de Crofton, en supprimant seulement les allusions aux probabilités, ce qui ne diminue en rien leur caractère suggestif, on pourrait s'écarter moins encore des raisonnements de Crofton en remarquant que certaines de ses démonstrations sont en somme des considérations de géométrie infinitésimale susceptibles de remplacer les calculs de déterminants fonctionnels que j'effectue directement.

L'intégrale

(2) $$I = \int\int dp\, d\theta,$$

étendue à toutes les droites D remplissant une certaine condition, par exemple coupant une courbe C donnée, a un sens très clair : si l'on considère $p$, $\theta$ comme deux coordonnées ordinaires d'un point $d$, c'est l'intégrale étendue au domaine $\Delta$ du plan $(p, \theta)$ dont tous les points $d$ correspondent à des droites D coupant C.

Si l'on dit qu'on compte dans I chaque droite D autant de fois qu'elle a de points de rencontre avec C, cela veut dire qu'on décompose $\Delta$ en régions $R_1$, $R_2$, ..., les points $d$ de $R_k$ correspondant aux droites D coupant C en $k$ points, et qu'on prend pour I la somme $\Sigma k I_k$, $I_k$ étant l'intégrale étendue à $R_k$. Ceci étant, nous démontrerons, avec Cauchy [1], le théorème suivant:

*La longueur* L *d'une courbe* C *est la moitié de* $\int\int dp\, d\theta$ *dans laquelle on compte chaque droite* D *du plan autant de fois qu'elle a de points communs avec* C [2].

Soit M, de coordonnées $x$, $y$, l'un des points de rencontre de D et de C ; soit $s$ l'abscisse curviligne de M sur C et soit $\alpha$ l'angle de $Ox$ et de la tangente à C au

---

[1] *Comptes rendus*, t. XIII.

[2] Pour éviter des difficultés inutiles à considérer ici, j'introduis les restrictions suivantes : C a une longueur finie et est formée d'un nombre fini d'arcs le long de chacun desquels C a une tangente variant d'une façon continue; le nombre maximum des points communs à C et à une droite D est fini.

L'intégration en $dp$ étant effectuée, I s'écrit $\int_0^\pi P\, d\theta$, où P est la longueur totale de la projection orthogonale de C sur une droite de direction $\theta$. C'est sous cette forme que Cauchy énonce son résultat. On pourra transformer de même les énoncés suivants.

point M. Les paramètres $p$, $\theta$ de la droite D vérifient l'équation (1) qui, différentiée, donne

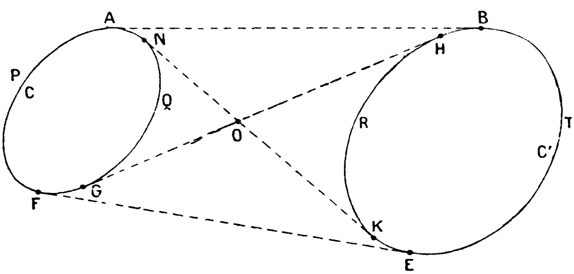
$$\sin(\theta - \alpha)\, ds = dp;$$

donc on a

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = \int\int dp\, d\theta &= \int\int |\sin(\theta - \alpha)|\, ds\, d\theta \\ &= \int_0^{\mathrm{L}} \left[\int_\alpha^{\pi+\alpha} \sin(\theta - \alpha)\, d\theta\right] ds = 2\mathrm{L}. \end{aligned}$$

Si l'on étendait l'intégrale I à toutes les droites coupant C, mais chaque droite n'intervenant qu'une fois dans I, la valeur de cette intégrale serait évidemment la longueur de la plus petite courbe convexe fermée $\Gamma$, telle que tout point de C soit point de $\Gamma$ ou soit point intérieur à $\Gamma$. Après avoir donné cette forme d'énoncé, Crofton en déduit de jolies conséquences : Soient C et C', deux contours convexes fermés, extérieurs l'un à

Fig. 1.




l'autre; menons les quatre tangentes communes à C et C' et désignons par I, I', $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\mathrm{J}_1$, $\mathrm{J}_2$ les valeurs de l'intégrale $\int\int dp\, d\theta$ étendue successivement aux droites coupant respectivement les contours convexes C, C', ABTEFP, ANOGFP, BHOKET, aux droites coupant à la fois C et C', aux droites passant entre C et C'. Dans ces intégrales, ne faisons compter qu'une fois chaque droite considérée ; alors on a évidemment

$$\alpha = I + I' - J_1 + J_2,$$
$$\beta + \gamma = I + I' + J_2.$$

Mais I et I' sont les longueurs L et L' de C et C', $\alpha$ est la longueur Y du contour ABTEFP, c'est-à-dire « la longueur d'un fil tendu entourant extérieurement C et C' », $\beta + \gamma$ est la longueur X du « fil tendu croisé entourant C et C' » et l'on a

$$(3) \qquad J_1 = X - Y \quad [1],$$
$$(4) \qquad J_2 = X - L - L'.$$

Pour définir les droites qui donnent $J_2$, il suffit de connaître les arcs NQG, HRK ; la valeur que nous trouvons pour $J_2$ ne dépend évidemment que de ces arcs. En faisant grandir ces arcs on pourra supposer, par exemple, qu'ils deviennent les deux branches d'une hyperbole et NOK, GOH deviendront les asymptotes de cette hyperbole. Alors l'intégrale $J_2$ nous fait connaître « la différence entre la longueur d'une hyperbole et la longueur de ses asymptotes ». Expression dont le lecteur précisera facilement le sens.

2. Nous allons évaluer maintenant des produits d'intégrale. Un tel produit sera une intégrale quadruple

$$J = \int\int\int\int dp\, dp'\, d\theta\, d\theta'.$$

Les deux droites D, D', qui déterminent les valeurs des variables dans cette intégrale, se coupent en un point M dont les coordonnées vérifient l'équation (1)

[1] On prouvera facilement que, si les deux contours C et C' se coupent, on a

$$J_1 = L + L' - Y.$$

et l'équation analogue relative à $p'$ et $\theta'$. En différentiant ces relations on a $dp$ et $dp'$, donc le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(p,p')}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \sin\theta' & -\cos\theta' \end{vmatrix} = \sin(\theta'-\theta),$$

et, par suite ;

$$\begin{aligned} J &= \int\int\int\int dp\, dp'\, d\theta\, d\theta' \\ &= \int\int\int\int |\sin(\theta'-\theta)|\, d\theta\, d\theta'\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Supposons que D et D' soient assujetties comme précédemment à rencontrer des courbes C, C', composées chacune d'un nombre fini d'arcs convexes (¹), ou à rencontrer à la fois deux telles courbes ou à passer entre elles ; alors on connaît la valeur de J. Or, dans ces cas, $\theta$ et $\theta'$ sont assujettis à varier entre des limites fonctions de $x, y$ qui correspondent aux diverses tangentes issues du point $xy$ aux courbes C et C'. Donc on peut effectuer les intégrations en $\theta$ et $\theta'$ et l'on exprime ainsi J sous forme d'une intégrale double en $dx\, dy$.

Considérons une courbe fermée convexe. Soient (C) l'ensemble des droites qui la rencontrent, ($\Gamma$) l'ensemble complémentaire. Nous allons considérer, avec Crofton, le cas où D et D' font partie de (C) et ($\Gamma$).

Supposons que le point $M(x, y)$ soit extérieur à C' et que de ce point on voit C sous un angle $\alpha$ ; calculons le coefficient de $dx\, dy$ dans l'intégrale double.

---

(¹) Lorsque cette condition n'est pas remplie, l'interprétation géométrique de $\int\int |\sin(\theta'-\theta)|\, d\theta\, d\theta'$ ne paraît guère possible si l'on ne veut utiliser que les éléments géométriques usuels.

Si D et D′ font partie de (C), on a

$$(5)\quad \iint |\sin(\theta-\theta')|\,d\theta\,d\theta' = \int_0^\alpha d\theta\left[\int_0^\theta \sin(\theta-\theta')\,d\theta' + \int_\theta^\alpha \sin(\theta'-\theta)\,d\theta'\right] = 2(\alpha-\sin\alpha);$$

pour D appartenant à (C) et D′ à (Γ), on a

$$(6)\quad \iint |\sin(\theta-\theta')|\,d\theta\,d\theta' = \int_0^\alpha d\theta\left[\int_\alpha^\pi \sin(\theta'-\theta)\,d\theta'\right] = 2\sin\alpha;$$

pour D et D′ faisant partie de (Γ), on a

$$(7)\quad \iint |\sin(\theta-\theta')|\,d\theta\,d\theta' = \int_\alpha^\pi d\theta\left[\int_\alpha^\theta \sin(\theta-\theta')\,d\theta' + \int_\theta^\pi \sin(\theta'-\theta)\,d\theta'\right] = 2(\pi-\alpha-\sin\alpha).$$

Comme vérification remarquons que, pour $\alpha = 0$, ce dernier résultat se réduit à $2\pi$, ce qui est bien la somme, pour $\alpha$ quelconque, du premier, du troisième et du double du deuxième résultat, c'est-à-dire ce qu'on doit obtenir quand D et D′ sont absolument quelconques. De là résulte aussi que, pour M intérieur à C, le coefficient de $dx\,dy$ est $2\pi$ quand D et D′ font partie de (C) et est nul dans les deux autres cas considérés.

Pour ce premier cas où D et D′ font partie de (C), l'intégrale quadruple J est égale à $L^2$ et la contribution du domaine intérieur à C dans l'intégrale en $dx\,dy$ est, on vient de le voir, $2\pi$ fois l'aire de ce domaine. Concluons avec Crofton, que :

*Si l'on désigne par $x$, $y$ les coordonnées d'un point extérieur à un contour convexe fermé C de lon-*

*gueur* L *et limitant une aire* S, *et si* $\alpha$ *est l'angle sous lequel on voit le contour* C *du point* $x, y$, *on a*

$$\int\int(\alpha - \sin\alpha)\,dx\,dy = \frac{1}{2}L^2 - \pi S,$$

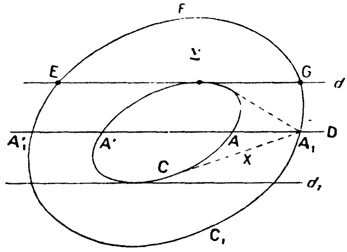
*l'intégrale étant étendue à toute la partie du plan extérieure à* C.

Pour le cas où D faisant partie de (C) et D' de (Γ), on a

$$J = 2\int\int \sin\alpha\,dx\,dy;$$

mais, comme cette intégrale étendue à tout le plan est infinie, Crofton ne l'étend qu'à un anneau limité par C et par une courbe convexe enveloppante $C_1$, ce qui revient à calculer $\int\int dp\,d\theta\left[\int\int dp'\,d\theta'\right]$ pour toute droite de (C) associée à toute droite de (Γ) qui la coupe dans l'anneau. Pour des valeurs données de $p$ et $\theta$, l'intégrale $\int\int dp'\,d\theta'$ est étendue aux droites ne rencontrant pas C et rencontrant la droite D $(p, \theta)$ dans l'anneau limité par C et $C_1$. Soient A, A'; $A_1$, $A'_1$ les points de rencontre de D avec C et avec $C_1$; l'intégrale

Fig. 2.




en $dp'\,d\theta'$ est étendue aux droites passant entre C et la courbe infiniment petite réduite à $A_1$ et aux droites analogues passant entre C et $A'_1$. Donc, formule (4), cette intégrale est égale à

$$X + X' - 2L,$$

en désignant par X la longueur du contour convexe formé par un arc de C et les deux tangentes à C issues de $A_1$ ; $X'$ est la quantité analogue relative à $A'_1$. Donc on a

$$J = \int\int (X + X')\, dp\, d\theta - 2L^2 = 2\int\int \sin\alpha\, dx\, dy.$$

Le cas intéressant est celui où X est constant, alors on a

$$\int\int \sin\alpha\, dx\, dy = L(X - L)$$

Dans tous les cas, comme X est fonction de l'abscisse curviligne $s_1$ de $A_1$ sur $C_1$, par un changement de variable analogue à celui du début du n° 1, on a

$$J = 2\int\int \sin\alpha\, dx\, dy = \int (\cos\lambda - \cos\mu) X\, ds_1 - 2L^2,$$

$\lambda$ et $\mu$ étant les angles des tangentes à C issues de $A_1$ avec la tangente à $C_1$ en ce point; on suppose $0 < \lambda < \mu < \pi$, $\mu - \lambda = \alpha$. Au changement de variables ici employé est lié la formule

$$2L = \int (\cos\lambda - \cos\mu)\, ds,$$

qui devient

$$L = \sin\frac{\alpha}{2}\int \sin\frac{\lambda + \mu}{2}\, ds_1, \qquad L = \int \sin\frac{\alpha}{2}\, ds_1,$$

respectivement si, le long de $C_1$, $\alpha$ est constant ou si X est constant, auquel cas, d'après le raisonnement bien connu qui conduit aux théorèmes de Grave et de Chasles sur les arcs d'ellipse et d'hyperbole, on a $\lambda + \mu = \pi$. On pourra appliquer ces formules au cas où, C étant une ellipse, $C_1$ est le cercle orthoptique de C ou est une ellipse homofocale à C.

Crofton considère aussi le cas où D faisant partie de (C), D' n'est assujettie qu'à rencontrer $C_1$ ; alors $J = 2\int\int \alpha\, dx\, dy$, l'intégrale étant étendue à l'anneau [formules (5) et (6)].

Conservant les mêmes notations que ci-dessus, raisonnons d'une façon analogue. $\int\int dp'\, d\theta'$ sera maintenant étendue à toutes les droites rencontrant $AA_1$ ou $A'A'_1$ ; donc ce sera $2(AA_1 + A'A'_1)$, par suite

$$\frac{J}{2} = \int\int \alpha\, dx\, dy = \int_0^\pi d\theta \left[\int (AA_1 + A'A'_1)\, dp\right].$$

L'intégration en $dp$ donne comme résultat l'aire de la partie de l'anneau limité par C et $C_1$ qui se trouve entre les tangentes $d$ et $d_1$ qui sont parallèles à D. Appelons $\Theta$ l'aire de l'anneau, $\Sigma$ l'aire du segment EFG extérieur à C et limité par $d$ à l'intérieur de $C_1$ ; marquons un sens de parcours sur C et soit $\varphi$ l'inclinaison de $d$; $\varphi$ sera égal à $\theta$ ou à $\theta + \pi$; $\Sigma$ est une fonction de $\varphi$ et l'on a

$$\int\int_{\text{anneau}} \alpha\, dx\, dy = \pi\Theta - \int_0^{2\pi} \Sigma\, d\varphi.$$

formule particulièrement intéressante quand $\Sigma$ est constant. On pourra en particulier l'appliquer à deux ellipses homothétiques et concentriques [1].

J'ai déjà dit qu'il n'y aurait aucune difficulté théorique nouvelle si l'on étendait l'intégrale J à des droites D, D' assujetties à occuper certaines situations vis-à-vis

[1] Une formule analogue peut être établie pour deux hyperboles homothétiques, concentriques et situées dans le même angle des asymptotes.

de courbes C, C′ convexes ou non. Seulement il faudra se rappeler que l'intégrale $\int\int |\sin(\theta - \theta')| \, d\theta \, d\theta'$, qu'il faut calculer, pourra changer d'expression chaque fois que le point $x$, $y$ traversera C, C′, une tangente singulière de C ou C′ ou une tangente commune à ces courbes. Ces courbes et droites partagent le plan en régions et les énoncés ne peuvent être simples que si le nombre de ces régions est petit. Crofton examine entièrement le cas où D et D′ rencontrent deux courbes convexes C et C′, C′ entourant C, auquel cas il n'y a que trois régions. Il obtient aussi le résultat suivant pour le cas où D et D′ sont assujettis à passer entre les branches d'une hyperbole ou d'une courbe analogue.

*Soit $\alpha$ celui des angles des tangentes à une hyperbole, issues du point extérieur $x$, $y$, dans lequel ne se trouve aucun point de la courbe; on a*

$$\int\int (\alpha - \sin\alpha) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \Delta^2,$$

*l'intégration étant étendue à toute la partie du plan extérieure à l'hyperbole et $\Delta$ étant la différence entre la longueur de l'hyperbole et la longueur de ses asymptotes.*

Comme autre cas où il n'y a que deux régions, on peut encore signaler celui où D et D′ devraient rencontrer une même épi ou hypocycloïde fermée n'ayant pas d'autres points singuliers que ses points de rebroussements. Le lecteur pourra faire le calcul pour une courbe ayant la forme d'une hypocycloïde à trois rebroussements.

3. Considérons maintenant le produit K de $k$ intégrales I, relatives à des droites $D_1$ $(p_1, \theta_1)$; ...; $D_k(p_k, \theta_k)$. Désignons par $x_\alpha$, $y_\alpha$ les coordonnées du

point $A_\alpha$ de rencontre de $D_\alpha$ et de $D_{\alpha+1}$. $A_\alpha$ désignera aussi l'angle compris entre o et $\pi$ de ces deux droites. $a_\alpha$ sera la distance de $A_{\alpha-1}$ et $A_\alpha$. Les indices 1 et $k+1$ seront considérés comme identiques. On a

$$\begin{aligned} K &= \underset{2k}{\int\cdots\int} dp_1\ldots dp_k\, d\theta_1\ldots d\theta_k \\ &= \underset{2k}{\int\cdots\int} dx_1\, dy_1\, dp_3\ldots dp_k\, d\theta_1\ldots d\theta_k \sin A_1. \end{aligned}$$

De la dérivation des égalités

$$\begin{aligned} x_2 \sin\theta_2 - y_2\cos\theta_2 &= x_1\sin\theta_2 - y_1\cos\theta_2, \\ x_2\sin\theta_3 - y_2\cos\theta_3 &= p_3, \end{aligned}$$

faite en supposant $x_2$, $y_2$, $\theta_2$, $p_3$, seuls variables, on tire

$$\left|\frac{D(\theta_2, p_3)}{D(x_2, y_2)}\right| = \left|\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{(x_1-x_2)\cos\theta_2 + (y_1-y_2)\sin\theta_2}\right| = \frac{\sin A_2}{a_2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (8)\qquad K &= \underset{2k}{\int\cdots\int} dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2\, dp_4\ldots dp_k \\ &\quad\times d\theta_1\, d\theta_3\ldots d\theta_k \sin A_1 \frac{\sin A_2}{a_2} \\ &= \underset{2k}{\int\cdots\int} dx_1\, dy_1\ldots dx_{k-1}\, dy_{k-1} \\ &\quad\times d\theta_1\, d\theta_k \sin A_1 \frac{\sin A_2}{a_2}\cdots\frac{\sin A_{k-1}}{a_{k-1}}. \end{aligned}$$

En supposant $x_k$, $y_k$, $\theta_1$, $\theta_k$ seuls variables, dérivons les égalités

$$\begin{aligned} x_k\sin\theta_1 - y_k\cos\theta_1 &= x_1\sin\theta_1 - y_1\cos\theta_1, \\ x_k\sin\theta_k - y_k\cos\theta_k &= x_{k-1}\sin\theta_k - y_k\cos\theta_k; \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} &\left|\frac{D(\theta_1,\theta_k)}{D(x_k, y_k)}\right| \\ &= \left|\frac{\sin(\theta_k-\theta_1)}{\begin{array}{l}[(x_1-x_k)\cos\theta_1 + (y_1-y_k)\sin\theta_1] \\ \times[(x_{k-1}-x_k)\cos\theta_k + (y_{k-1}-y_k)\sin\theta_k]\end{array}}\right| = \frac{\sin A_k}{a_1 a_k}. \end{aligned}$$

Donc :

$$(9)\qquad K = \int_{\dots 2k \dots} \dots \int \frac{\sin A_1 \dots \sin A_k}{a_1 \dots a_k} dx_1\, dy_1 \dots dx_k\, dy_k.$$

D'où des énoncés tels que celui-ci : L'intégrale précédente, étendue à tous les groupes de $k$ points $A_1, \dots, A_k$ tels que chaque droite $D_\alpha$ coupe un contour convexe fermé $C_\alpha$ de longueur $L_\alpha$, est égale au produit $L_1 L_2 \dots L_\alpha$ des longueurs de ces contours.

Un tel énoncé fait intervenir un domaine d'intégration fort compliqué et ne permet pas d'abaisser l'ordre de l'intégrale K dont on est parti. Ceci peut cependant se faire dans une certaine mesure; pour le cas de trois droites, par exemple, on a vu, formule (8), que

$$K = \int\int\int\int\int\int dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2\, d\theta_1\, d\theta_3 \frac{\sin A_1 \sin A_2}{a_2};$$

or les intégrations en $d\theta_1$ et $d\theta_3$ peuvent être effectuées de suite. Mais après le domaine d'intégration est encore formé de tous les couples de points tels que la droite qui les porte rencontre une courbe donnée.

Laissons donc de côté ce mode de généralisation, qui fournit cependant des exercices précieux pour les professeurs, et essayons maintenant de généraliser en remplaçant l'intégrale I primitive par une autre intégrale. Cela est possible d'une infinité de manières ; choisissons les intégrales qu'étudie Crofton.

4. Prenons pour I l'intégrale double $\int\int dx dy$, d'où $J = \int\int\int\int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$ et introduisons les coordonnées $p, \theta$ de la droite joignant les deux points $x_1 y_1$ ; $x_2 y_2$, ainsi que les distances $\rho_1$, $\rho_2$ de ces points au pied de la perpendiculaire abaissée de l'ori-

gine sur la droite. On a

$$x_1 = -p\sin\theta + \rho_1\cos\theta, \qquad x_2 = -p\sin\theta + \rho_2\cos\theta,$$
$$y_1 = \quad p\cos\theta + \rho_1\sin\theta, \qquad y_2 = \quad p\cos\theta + \rho_2\sin\theta,$$

d'où, par un calcul facile et qu'on pourrait d'ailleurs supprimer en partie à l'aide de ce qui précède,

$$J = \int\int\int\int |\rho_2 - \rho_1|\, dp\, d\theta\, d\rho_1\, d\rho_2.$$

Or les intégrations en $d\rho_1 d\rho_2$ peuvent être effectuées; supposons que l'intégrale I soit étendue à l'intérieur d'un contour convexe C, alors $\rho_1$ et $\rho_2$ peuvent varier entre deux limites $a$, $b$ $(a > b)$, fonctions de $p$, $\theta$ et telles que $c = b - a$ soit la longueur de la corde découpée dans C par la droite $p, \theta$. Et l'on a

$$\int\int |\rho_2 - \rho_1|\, d\rho_1\, d\rho_2$$
$$= \int_a^b d\rho_1 \left[ \int_a^{\rho_1} (\rho_1 - \rho_2)\, d\rho_2 + \int_{\rho_1}^b (\rho_2 - \rho_1)\, d\rho_2 \right] = \frac{1}{3} c^3,$$

d'où le résultat de Crofton :

C *étant un contour convexe limitant une aire* S, *et* $c$ *étant la longueur de la corde de* C *qui est portée par la droite*

$$x\sin\theta - y\cos\theta - p = 0,$$

*on a l'égalité*

$$\int\int c^3\, dp\, d\theta = 3\,S^2;$$

*l'intégrale étant étendue à toutes les sécantes de* C.

Ce théorème est susceptible des mêmes modes de généralisation que celui précédemment étudié. On pourra supposer que les deux intégrales I, dont J est le produit, ne sont pas relatives au même domaine. Si, par exemple, la droite $(p, \theta)$ considérée a dans un domaine convexe $C_1$ d'aire $S_1$ un segment $c_1$ et si $l$ est la distance des milieux de $c$ et $c_1$, on a

$$\int\int cc_1\, l\, dp\, d\theta = SS_1,$$

quand les courbes C et $C_1$ sont entièrement extérieures l'une à l'autre.

On pourra aussi multiplier plus de deux intégrales I; pour trois intégrales nous aurons trois points $x_1, y_1$; $x_2, y_2$; $x_3, y_3$ dont il sera naturel d'exprimer les coordonnées à l'aide du rayon R de la circonférence passant par ces trois points, des coordonnées $\xi, \eta$ de son centre et des inclinaisons $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ des rayons des trois points. On verra que les intégrations en $d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3$ peuvent être effectuées et l'on exprimera ainsi le produit de trois aires par une intégrale triple étendue à une famille de cercles. Pour obtenir un énoncé simple, il faut, comme précédemment, que le nombre des régions soit petit. Un cas où l'on n'aurait qu'une région serait celui où les courbes limitant les domaines seraient extérieures les unes aux autres et telles que toute circonférence qui les coupe toutes trois ne coupent chacune d'elles qu'en deux points. Je laisse au lecteur le soin de formuler le résultat qui est relativement simple.

Crofton considère encore l'intégrale $I = \int d\varphi$, où $\varphi$ représente l'inclinaison de la tangente dirigée à une courbe convexe C. Pour avoir toutes les tangentes on prendra $\varphi$ de $0$ à $2\pi$ et $I = 2\pi$. Pour calculer $J = I^2 = 4\pi^2$, introduisons les coordonnées $x, y$ du point de rencontre des deux tangentes d'inclinaison $\varphi$ et $\varphi'$. Si $\xi$ et $\eta$ sont les coordonnées du point de contact de la première on a :

$$(10) \qquad x \sin\varphi - y \cos\varphi = \xi \sin\varphi - \eta \cos\varphi.$$

En dérivant et en se rappelant que $d\xi$ et $d\eta$ sont proportionnels à $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, on a

$$(11)\quad dx\sin\varphi - dy\cos\varphi = [(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\sin\varphi]\,d\varphi$$

et une égalité analogue en $\varphi'$. Or la quantité entre crochets est la distance des points $\xi, \eta$; $x, y$, c'est-à-dire la longueur T de l'une des tangentes issues de $x, y$ à C. T' étant l'autre tangente et $\alpha$ l'angle de ces deux tangentes, en remarquant que les deux combinaisons $\varphi, \varphi'$ et $\varphi', \varphi$ donnent le même point $x, y$, on a

$$J = 2\int\int \frac{\sin\alpha}{TT'}\,dx\,dy.$$

Crofton considère aussi l'intégrale $\int ds$ étendue à la même courbe. Puisque l'on a

$$ds = R\,d\varphi,$$

R étant le rayon de courbure en $\xi, \eta$; on aura aussi

$$\int\int ds\,ds' = 2\int\int \sin\alpha\,\frac{RR'}{TT'}\,dx\,dy.$$

D'où ces deux résultats de Crofton :

*$x, y$ étant les coordonnées rectangulaires d'un point extérieur à une courbe convexe* C *de longueur* L; T, T' *les longueurs des tangentes à* C *issues de $x$, $y$; $\alpha$ leur angle;* R *et* R' *les rayons de courbure de* C' *aux points de contact des tangentes considérées, on a*

$$2\pi^2 = \int\int \sin\alpha\,\frac{dx\,dy}{TT'}, \qquad L^2 = 2\int\int \sin\alpha\,\frac{RR'}{TT'}\,dx\,dy;$$

*les intégrales étant étendues à la partie du plan extérieure à* C.

Au lieu de faire le produit de plusieurs intégrales I de même expression, on peut aussi multiplier des intégrales de formes différentes. La considération du produit des deux précédentes intégrales I conduit à un résultat qui, avec les notations précédentes, est exprimé par l'égalité

$$2\pi L = \int\int \sin\alpha \frac{R + R'}{TT'} \, dx\, dy.$$

Combinons aussi la première intégrale I avec les deux dernières et calculons par exemple $\int\int\int dp\, d\theta\, d\varphi$. $x$, $y$ étant les coordonnées du point commun à la droite $(p, \theta)$ et à la tangente d'inclinaison $\varphi$, passons des variables $p, \theta, \varphi$ aux variables $x, y, \theta$. La différentielle totale $d\varphi$ vient d'être calculée (11) et la différentiation de l'équation (1) donne $dp$, d'où

$$\left| \frac{D(p, \theta, \varphi)}{D(x, y, \theta)} \right| = \frac{|\sin(\theta - \varphi)|}{T}.$$

L'intégration en $d\theta$ peut être effectuée; elle donne $1 - \cos\alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; donc, en étendant toujours les intégrales à la partie du plan extérieure à C, on a

$$\pi L = \int\int \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) dx\, dy;$$

$$L^2 = 2 \int\int \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left( \frac{R}{T} + \frac{R'}{T'} \right) dx\, dy.$$

5. L'intégrale $\int\int dp\, d\theta$ présente un intérêt qu'il faut signaler. On peut définir la mesure d'un ensemble quelconque de points en disant que c'est un nombre positif ou nul attaché à l'ensemble et tels que deux ensembles égaux, c'est-à-dire superposables, aient même mesure, et que l'ensemble formé par la réunion de plusieurs [1] autres, sans éléments communs deux à

---

[1] Si par « plusieurs » on entend un nombre fini, la définition s'applique aux ensembles mesurables au sens de M. Jordan; si « plusieurs » peut signifier une infinité dénombrable, la définition s'applique à tous les ensembles dits *mesurables*.

deux, ait pour mesure la somme des mesures des ensembles composants.

Cette définition suffit pour définir la mesure à un facteur près, dont l'existence correspond à la possibilité de choisir à volonté l'unité de mesure. On peut prendre la même définition pour la mesure d'un ensemble quelconque dont les éléments sont, non plus des points, mais d'autres êtres géométriques. Pour étudier le cas des ensembles de droite, faisons correspondre comme au début à chaque droite $D(p, \theta)$ de l'ensemble un point $d$ de coordonnées ordinaires rectangulaires $p, \theta$. Un déplacement dans le plan des D revient au changement de variables

$$(12) \qquad \begin{cases} \theta_1 = \theta + a, \\ p_1 = p + b\cos\theta + c\sin\theta, \end{cases}$$

où $a, b, c$ sont des constantes. Nous avons donc à déterminer la mesure des ensembles de points $d$ en considérant comme superposables deux ensembles transformables l'un dans l'autre par une des transformations (12). Or ceci est très simple. Divisons le plan en quadrilatères curvilignes par les droites $x = nh$ et les courbes $y = nh + \cos x$, $h$ étant un nombre positif fixes et $n$ prenant toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles. Ces quadrilatères sont superposables au sens indiqué, ils ont donc même mesure. Ils ont, d'autre part, évidemment même aire.

Soient alors $\pi$ et $\pi_1$ deux domaines simples, deux domaines polygonaux par exemple, du plan des $d$. Soit $m$ (ou $m_1$) le nombre des quadrilatères qui sont contenus dans $\pi$ (ou $\pi_1$) et soit M (ou $M_1$) le nombre des quadrilatères qui contiennent des points de $\pi$ (ou $\pi_1$). On a

$$\frac{m}{M_1} \leqq \frac{\text{aire } \pi}{\text{aire } \pi_1} \leqq \frac{M}{m_1},$$

et l'on sait que, quand $h$ tend vers zéro, les deux membres extrêmes ont la même limite. Mais on a aussi

$$\frac{m}{M_1} \leqq \frac{\text{mesure } \pi}{\text{mesure } \pi_1} \leqq \frac{M}{m_1},$$

donc

$$\frac{\text{mesure } \pi}{\text{aire } \pi} = \frac{\text{mesure } \pi_1}{\text{aire } \pi_1} = \lambda; \tag{13}$$

$\lambda$ est arbitraire. On peut prend $\lambda = 1$. Partant de là on peut construire une théorie de la mesure des ensembles de droites qu'on peut résumer en disant qu'un ensemble E de droite D est dit *mesurable* lorsque l'ensemble $e$ des points $d$ correspondants est mesurable [1] et qu'ils ont même mesure $\int\int dp\,d\theta$ [2].

Ces conclusions supposent toutefois qu'on ait donné une valeur finie à la constante $\lambda$ de l'équation (13) et il est obligé qu'il en soit ainsi si l'on désire qu'un ensemble E de droites, auquel correspond un ensemble $e$ de points $d$ couvrant une partie du plan, ait une mesure finie. Mais si $e$ est une courbe ordinaire, un arc analytique par exemple, et si l'on ne s'occupe du problème de la mesure que pour les ensembles $\mathcal{E}$ formés de droites appartenant à E, on pourra donner à $\lambda$ une valeur infinie. Il est facile de voir que le problème de la mesure est alors indéterminé; soit, en effet, R le rayon de courbure de la courbe $\Lambda$ enveloppe des droites D, formant E, au point d'abscisse curviligne $s$ de cette courbe; quelle que soit la fonction positive $f$, l'inté-

---

(1) Au sens ordinaire du mot, c'est-à dire la superposition étant définie par la considération des déplacements ordinaires dans le plan des $d$.

(2) Le raisonnement précédent s'appuie uniquement sur le fait qu'une transformation quelconque du groupe (12) est biunivoque, continue, qu'elle conserve les aires et qu'elle dépend de trois paramètres.

grale

$$\int f\left(\mathrm{R}, \frac{d\mathrm{R}}{ds}, \frac{d^2\mathrm{R}}{ds^2}, \ldots\right) ds,$$

étendue à l'ensemble des points de contact des droites de $\mathcal{E}$, donne une solution du problème. Les deux intégrales $\int d\varphi$, $\int ds$, considérées par Crofton, sont des cas particuliers de celle-ci qui ne fournit cependant pas la solution la plus générale du problème ([1]).

L'insuffisance des conditions du problème de la mesure que nous rencontrons ici est analogue à l'insuffisance connue de ces mêmes conditions pour caractériser la longueur d'une courbe plane ou gauche ou l'aire d'une surface.

---

([1]) Le probleme est d'ailleurs fort imprecis Si A est donnee et si l'on ne s'occupe de satisfaire aux conditions du probleme de la mesure que pour des ensembles de tangentes a A, il se peut même que la seconde condition de ce probleme perde tout sens, cela arrivera notamment si R ne reprend jamais deux fois la même valeur, auquel cas $\int \varphi(s)\,ds$ donnera une solution du probleme, quelle que soit $\varphi(s)$ positive

Si l'on veut resoudre le probleme pour tous les ensembles de droites qui enveloppent des courbes formees d'un nombre fini d'arcs analytiques, le probleme se precise beaucoup plus et il se pourrait que l'integrale du texte en fournisse la solution la plus generale.

Quand on ne s'occupe que d'ensembles dont les elements, dependant des coordonnees $p_1$, $p_2$, sont definis par des egalités analytiques de la forme $p = f_i(t_1, t_2, \ldots, t_\alpha)$, il est naturel d'attacher une importance particuliere aux solutions du probleme de la mesure de la forme

$$\iint\cdot\int \mathrm{F}\left(p_1, \ldots, \frac{dp_1}{dt_1}, \ldots, \frac{d^2 p_\alpha}{dt_1^2}, \ldots\right) dt_1 \ldots dt_\alpha$$

La theorie des groupes donne des procedes permettant la recherche de ces integrales Dans un article du *Bulletin de la Societe mathematique*, 1896, M. E Cartan a etudie toutes celles de ces integrales qui ne portent que sur des fonctions des parametres, pour le cas des droites dans le plan et pour les cas des plans et des droites dans l'espace, en signalant leur importance au point de vue de la mesure.

6. Il est facile maintenant de faire comprendre comment des questions de probabilités ont pu conduire Crofton à l'étude des intégrales indiquées. Supposons qu'on jette au hasard une aiguille sur le sol et que la position de cette aiguille détermine la droite prise au hasard dans le plan. On pourra se demander quelle est la probabilité pour que cette droite satisfasse à certaines conditions. Cette probabilité a un sens statistique assez net; il s'agit de la définir et de la calculer mathématiquement. Comme dans tout autre essai de traduction mathématique d'un problème physique, il nous faut ici introduire des hypothèses. Celles que l'on adopte sont relatives à ce que l'on doit appeler des circonstances également probables, comme dans le cas des probabilités ordinaires. Nous supposerons que la façon de jeter l'aiguille au hasard est telle qu'il y a probabilité égale pour que la droite appartienne à un ensemble E ou à un ensemble $E_1$, pourvu que E et $E_1$ se déduisent l'un de l'autre par un déplacement du plan (1).

On est alors conduit à admettre que le rapport des probabilités pour que la droite fasse partie d'un ensemble $e$ ou d'un ensemble $e_1$ est le rapport des mesures de $e$ et de $e_1$. D'où la définition et la détermination mathématique des probabilités.

Les considérations du paragraphe 1 sont utilisées par Crofton pour des problèmes de probabilités relatives à la droite. Les considérations du paragraphe 2

---

(1) Il n'est raisonnable de supposer cette condition à peu près réalisée physiquement que si l'on ajoute que les droites composant E et $E_1$ doivent être à une distance inférieure à une longueur donnée d'un point donné. Toutes les positions que l'aiguille peut effectivement prendre forment un ensemble dont la probabilité doit être prise égale à un.

sont relatives à des problèmes où l'on étudie les angles dont, par exemple, les deux côtés rencontrent une même courbe convexe. La mesure des ensembles d'angles présente cette particularité nouvelle que, tous les éléments des ensembles n'étant plus nécessairement superposables, il est bien certain *a priori* que les conditions du problème de la mesure seront insuffisantes pour la définition d'une mesure unique ([1]).

Par exemple, $f(\theta - \theta')$ étant une fonction positive $\int\int\int\int f(\theta - \theta')\, dp\, dp'\, d\theta\, d\theta'$, étendue aux paramètres $p, p'$, $\theta, \theta'$ fixant la position des deux côtés de l'angle, sera une solution du problème de la mesure.

Crofton suppose qu'on choisisse au hasard, indépendamment l'un de l'autre, les deux côtés de l'angle et il applique le théorème des probabilités composées, ce qui est très légitime si l'on a égard à la définition statistique de la probabilité. Il est donc conduit à prendre $f = 1$ ([2]).

---

([1]) Cette insuffisance n'est pas de nature différente de celle déjà rencontrée. Dans les deux cas il y a insuffisance, parce que le groupe de transformations, qui nous est donné comme conservant la mesure, ne contient pas assez de paramètres pour qu'il nous soit possible de décomposer tous les ensembles à mesurer en ensembles infiniment petits de mesures égales.

([2]) On peut noter qu'il se présente ici une circonstance, qu'on rencontre fréquemment; il suffit d'admettre la partie qualitative du théorème pour que la partie quantitative en soit une conséquence nécessaire. Admettons, en effet, que la probabilité relative à une position d'un angle ne dépende que des probabilités relatives aux positions de ses côtés. Il faudra évaluer cette probabilité avec une mesure des angles qui soit seulement fonction des mesures $m$ et $n$ des ensembles formés par les côtés de l'angle. Or cette fonction, $f(m, n)$ doit être croissante et par rapport à $m$ et par rapport à $n$ et l'on doit avoir

$$f(m+m', n+n') = f(m, n) + f(m, n') + f(m', n) + f(m', n'),$$

d'où l'on déduit de suite $f = Cmn$. D'où le théorème des probabilités composées.

Les intégrales du paragraphe 4 sont considérées par Crofton à l'occasion de questions relatives à des couples de points dans un domaine convexe et à des couples de tangentes d'une courbe donnée.

Le lecteur, qui s'intéresserait à ces questions de mesure et qui désirerait connaître ce qui a été fait relativement aux mesures d'ensembles de plans ou de droites de l'espace, devrait se reporter aux travaux déjà cités de Cauchy, de Crofton, de M. Czuber et de M. Cartan, ainsi qu'aux travaux de géométrie de Minkowski (1).