Certificat de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 425-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__425_1>

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles*

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-x)\frac{\partial z}{\partial y} = z. \tag{1}$$

1° *Démontrer que parmi les surfaces intégrales il y a une infinité de surfaces, dépendant d'une constante arbitraire, qui sont de révolution autour de* Oz;

2° *Intégrer l'équation. Déterminer une surface intégrale par la condition qu'elle contienne la parabole qui a pour équations*

$$y = 0, \qquad z = x^2.$$

3° *Par un point* M *de coordonnées* x, y, z, *autre que l'origine, passe une courbe caractéristique* C *de l'équation* (1) *et une seule. Déterminer, en fonction de* x, y, z, *les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe au point* M, *l'équation du plan osculateur en* M *à la même courbe et le rayon de courbure de la courbe au point* M;

4° *Démontrer que les caractéristiques sont des hélices.*

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$(x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + 2(x - 1)\frac{dy}{dx} - 2y = \frac{2}{x + 1}$$

sachant que l'équation sans second membre admet une solution particulière de la forme $Ax + B$, *où* A *et* B *sont des constantes qu'on déterminera.* (Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — *Qu'appelle-t-on intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire*

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Montrer comment on peut déterminer une pareille intégrale.

Comment obtient-on l'intégrale générale de l'équation lorsqu'on connaît une intégrale complète?

2° *Application : Intégrer l'équation*

$$k^2(p^2 + q^2) - z^2 = 0,$$

où k *désigne une constante donnée.*

3° *Les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, démontrer que parmi les surfaces intégrales de cette dernière equation il y a une infinité de surfaces de révolution autour de* Oz, *et déterminer ces surfaces.*

Épreuve pratique. — *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\alpha - \beta)x + \beta y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\beta x + (\alpha + \beta)x,$$

où α *et* β *désignent deux constantes données.*

(Novembre 1910.)

Épreuve théorique. — *Résoudre l'équation aux différentielles totales*

$$(y^2 - x^4)\,dz + (3x^2yz^2 - 2x^3z - y^2)\,dx$$
$$- (x^3z^2 + y^2z - 2xy)\,dy = 0.$$

On cherchera une solution particulière de la forme

$$z = \varphi(y) x^m,$$

où φ est une fonction de y seulement.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_C \frac{\cot \pi z}{z(z+1)} dz,$$

le contour C du plan des $z = x + yi$ étant formé :

1° *De la droite $y = 1$, $x \geqq \frac{1}{2}$ parcourue depuis $x = +\infty$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$;*

2° *Du segment de droite* AB, A $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *et* B $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$;

3° *De la droite $y = -1$, $x \geqq \frac{1}{2}$ parcourue de* B *à $x = \infty$.*

(Juillet 1911.)

Nancy.

I. *Établir l'existence des deux périodes de l'intégrale*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}.$$

II. *On considère la fonction de x*

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha.$$

1° *Démontrer que l'on a*

$$xy = 2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha \, d\alpha.$$

2° *En déduire que $y(x)$ satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre indépendante de α et former cette équation;*

3° *Dans l'hypothèse $n = 2$, montrer que l'équation admet* *deux intégrales particulières de la forme* Pe^p, P *et* p *étant des polynômes en* x. *Former l'intégrale générale et calculer la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^3}\, d\alpha.$$

4° *Extension des résultats obtenus au cas où* n *est un entier positif quelconque.* (Juin 1910.)

I. *On considère l'équation différentielle*

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dr^2} = 6y^2 - 6.$$

1° *Former l'intégrale générale de cette équation;*

2° *Montrer qu'il existe deux familles d'intégrales particulières qui s'expriment au moyen de fonctions trigonométriques. Écrire explicitement ces intégrales;*

3° *Appelant* x_0 *une valeur quelconque de* x, *on développera en série de Laurent les intégrales de l'équation* (1) *qui admettent* x_0 *comme pôle et l'on montrera que le développement contient un coefficient arbitraire; on appellera* λ *ce coefficient;*

4° *Laissant* x_0 *fixe, on fera varier* λ. *A toute valeur de* λ *correspond une intégrale de l'équation* (1) *dont les périodes* ω *et* ω' *se trouvent être par conséquent fonctions de* λ; *quelles sont les valeurs de* λ *pour lesquelles les fonctions* $\omega(\lambda)$ *ou* $\omega'(\lambda)$ *deviennent infinies?*

II. *Équation des lignes asymptotiques et des lignes de courbure en coordonnées curvilignes.*

(Octobre 1910.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — *On considère l'équation différentielle*

$$(1) \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} = zt\,\frac{du}{dt} = mu.$$

1° *Donner une expression de l'intégrale générale de* *cette équation. Montrer que pour* $m = 2$ *l'intégration se ramène à une quadrature.*

2° *Quelle relation peut-on établir entre les intégrales de deux équations* (1) *où* m *prend deux valeurs différentes ayant pour somme* 2 ?

3° *Appelons* (Γ) *une courbe dont les coordonnées cartésiennes, exprimées en fonction de* t, $x = f(t)$, $y = g(t)$, *sont deux intégrales de* (1), *réelles et positives pour* t *réel et positif. Quelle est l'aire balayée par le rayon vecteur (issu de l'origine) entre deux quelconques de ses positions ?*

4° *Construire et discuter les courbes réelles* (Γ) *pour* $m = 2$. *Quel est le genre des fonctions* $u(t)$ *correspondantes? (On déterminera d'abord le genre de leurs dérivées logarithmiques.)*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit* $y = \wp(x)$ *la fonction elliptique de périodes* $\omega = 1$, $\omega' = 2i$ *qui est infinie à l'origine. Soient, d'autre part,*

$$u(x) = \int^{x} \frac{\wp(x)}{x}\,dx, \qquad v(x) = \int^{x} \frac{\wp'^2(x)}{x}\,dx$$

deux fonctions de x *infinies à l'origine.*

1° *Pour* x *réel et supérieur à* 100, *calculer à* $\frac{1}{100}$ *près les différences* $u(x+1) - u(x)$, $v(x+1) - v(x)$.

2° *Appelant* ω *un nombre quelconque de module* 1, *montrer que la différence* $u(\omega x) - u(x)$ *reste finie lorsque* x *augmente indéfiniment par valeurs réelles positives.* (Juin 1911.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Étant donnée une fonction* $P(x, y)$, *déterminer une fonction* $\lambda(x, y)$ *qui satisfasse aux deux équations aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial(\lambda P)}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = -\frac{\partial(\lambda P)}{\partial x}. \tag{2}$$

1° *Montrer que le problème n'est possible que si l'expression*

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} dx - \frac{\partial P}{\partial x} dy}{1 + P^2}$$

est différentielle exacte et que, si cette condition est satisfaite, on peut obtenir $\log \lambda$ *par des quadratures;*

2° *Effectuer les calculs en supposant* $P = \frac{x}{y}$;

3° *Montrer que si* $\lambda_1(x, y)$ *vérifie les équations* (1) *et* (2), *l'expression*

$$\lambda_1(dy + P)dx$$

est la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$ *qui est une solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

II. *Soient* (C) *uue courbe,* (C_1) *la développée de* (C), (C_2) *la développée de* (C_1), *et ainsi de suite,* (C_n) *désignant la développée de* (C_{n-1}). *Soient* M *un point quelconque de* (C) *et* M_1, M_2, ..., M_n *les points correspondants sur les courbes* (C_1), (C_2), ..., (C_n).

1° (C) *étant définie comme enveloppe des droites (en coordonnées rectangulaires* xOy)

$$x \sin\theta - y \cos\theta = f(\theta),$$

trouver en fonction de O *les coordonnees des points* M, M_1, ..., M_n;

2° *Déterminer la fonction* $f(O)$ *de sorte que l'angle* MOM_1 *soit droit.*

Vérifier qu'alors le rapport $\frac{OM}{OM_1}$ *reste constant. En déduire que* (C) *et* (C_1) *sont semblables.*

Vérifier que les courbes dont les indices ont la même parité sont homothétiques par rapport à l'origine.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

2° *Vérifier que l'on a une intégrale particulière de l'équation* (I) *en considérant la surface* (S) *qui, rapportée à des axes rectangulaires, est représentée par l'équation*

$$(\mathrm{S}) \qquad \left(\frac{x - h\sqrt{\frac{z}{c}}}{a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c},$$

où a, b, c, h *désignent des constantes;*

3° *Soit* (T) *le solide homogène limité par la surface* (S) *et par les plans* $z = 0$ *et* $z = c$.

Calculer, pour le solide (T) :

1° *L'aire de l'ellipse, section par un plan* $z =$ const.;

2° *Le volume;*

3° *Le moment d'inertie par rapport à* Oz;

en se limitant, pour ce moment d'inertie, au cas particulier où l'on a à la fois

$$h = 0, \qquad b = a.$$

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. x, y, z *désignant les coordonnées d'un point* M *rapporté à trois axes rectangulaires, et* k *désignant une constante, on pose :*

$$\begin{aligned} u &= x(x + y + z), \\ v &= y(x + y + z), \\ w &= z(x + y + z). \end{aligned}$$

1° *Le système d'équations différentielles*

$$k\frac{dx}{dt} = u,$$

$$k\frac{dy}{dt} = v,$$

$$k\frac{dz}{dt} = w$$

définit la position au temps t *du point* $\mathrm{M}(x, y, z)$ *qui pour* $t = 0$ *avait comme coordonnées* a, b, c.

Exprimer x, y, z *en fonction de* a, b, c, t, *et inversement* a, b, c *en fonction de* x, y, z, t.

Vérifier que les points qui à l'instant $t = 0$ *se trouvent* *dans un plan*

$$(P_0) \qquad a + b + c = \text{const.}$$

se trouvent, à l'instant t, dans un plan

$$(P) \qquad x + y + z = \text{const.}$$

et que, à une ligne (L_0) *située dans le plan* (P_0) *correspond de cette façon une ligne* (L) *située dans le plan* (P), *homothétique de la ligne* (L_0).

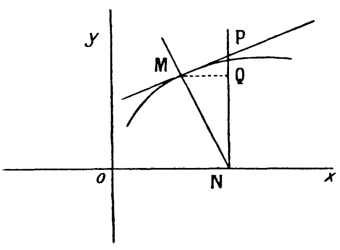
2° *Intégrer l'équation linéaire aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) p + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) q = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vérifier que les points qui, à l'instant $t = 0$, *se trouvaient sur une surface intégrale de cette équation sont, à l'instant* t, *sur une autre surface intégrale de la même équation.*

II. 1° *Déterminer une courbe satisfaisant à la condition suivante :*

En un point quelconque M *on mène la normale jusqu'à*



sa rencontre en N *avec* Ox; *la parallèle* NP *à* Oy *coupe la tangente en* M *au point* T; *la longueur* NT *doit être égale à une longueur constante* 2R;

2° *Pour intégrer l'équation différentielle obtenue, on pourra exprimer l'y du point* M, *c'est-à-dire* NQ, *au moyen de l'angle* ω *de la tangente* MP *avec* Oy.

Vérifier que la courbe C *est une cycloïde engendrée par un cercle de rayon* R *roulant sans glissement sur* Ox.

(Novembre 1910.)