J. Haag

Sur la déformation infiniment petite des surfaces réglées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 337-358

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__337_0>

[O4g]

SUR LA DÉFORMATION INFINIMENT PETITE DES SURFACES RÉGLÉES;

Par M. J. HAAG, à Clermont-Ferrand.

(*Suite et fin.*)

8. *Étude des douze surfaces.* — Nous allons chercher maintenant si l'on peut obtenir des résultats intéressants en appliquant au cas actuel la théorie des douze surfaces, que M. Darboux a rattachée au problème général de la déformation infiniment petite (*Théorie des surfaces*, t. IV, p. 48 et suiv.).

Nous avons d'abord la surface (A) définie par les équations

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{\theta_1}{\omega} = \frac{2a - a'(\alpha+\beta)}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)},\\ y' &= \frac{\theta_2}{\omega} = \frac{2b - b'(\alpha+\beta)}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)},\\ z' &= \frac{\theta_3}{\omega} = \frac{2c - c'(\alpha+\beta)}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)}.\end{aligned}\right.$$

Les lignes (α) *de cette surface sont planes* et dans les plans (π) menés par o perpendiculairement aux génératrices (α) de (S). *Si une d'elles est rectiligne, il en est de même de toutes les autres et la surface* (A) *est développable.* En effet, si l'on écrit que x', y', z' vérifient les équations des projections d'une droite sur les plans de coordonnées, on obtient des relations de la forme

$$B'(\alpha+\beta) - 2B + m\beta + n = 0 \qquad (m, n = \text{const.}).$$

Or, cette équation, intégrée par rapport à B, donne un trinome du second degré en β, qui peut être réduit à zéro (n° 4). Mais alors, il est aisé de vérifier que (A) est une surface développable dont l'arête de rebroussement a pour équations

$$x = -\frac{a}{A}, \qquad y = -\frac{b}{A}, \qquad z = -\frac{c}{A}.$$

Passons maintenant à la surface (Σ), dont le point P homologue du point M de (S) a pour coordonnées

$$X = x + y'z_1 - z'y_1, \qquad Y = y + z'x_1 - x'z_1,$$
$$Z = z + x'y_1 - y'x_1.$$

Si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$= \int (b'c'' - c'b'')\,d\alpha, \qquad \eta = \int (c'a'' - a'c'')\,d\alpha,$$
$$\zeta = \int (a'b'' - b'a'')\,d\alpha,$$

on a, par exemple,

$$(36) \quad X = \xi + \frac{2B'(cb' - bc') + 2(bw - cv) + (\alpha + \beta)(c'v - b'w)}{(A' + B')(\alpha + \beta) - 2(A + B)},$$

Y et Z s'en déduisant par permutations circulaires.

On sait que la surface (Σ) est rapportée à ses lignes asymptotiques et qu'elle correspond à (A) avec orthogonalité des éléments. *Pour* $B = 0$, *elle est visiblement réglée.*

Si la développable Δ (n° 7) *est un cône de sommet* O, on peut prendre $A = u = v = w = 0$. Alors X se réduit à

$$X = \xi + \frac{2(cb' - bc')}{\alpha + \beta - \frac{2B}{B'}}.$$

Donc le point P coïncide avec le point M' de (S) dont les coordonnées (α', β') sont $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta - \frac{2B}{B'}$. Par suite, (Σ) *coïncide avec* (S). Voilà *deux cas où la surface* (Σ) *est réglée; montrons qu'il n'y en a pas d'autres*, en supposant du moins que ses génératrices rectilignes sont les lignes (α).

En effet, supposons d'abord *qu'une ligne* α *particulière soit une droite non parallèle à* D. La ligne homologue de (A) se trouve alors dans un plan perpendiculaire à cette droite; comme elle est déjà dans le plan π, perpendiculaire à D, elle est forcément rectiligne et, par suite, *on peut prendre* $B = 0$ *et la surface* (Σ) *est réglée*.

Ce raisonnement est en défaut *si la droite* (α) de (Σ) *est parallèle à* D. Mais, s'il en est ainsi, les deux quantités $S(X - \xi)a$ et $S(X - \xi)a'$ doivent se réduire à des fonctions de α. Or, elles sont égales respectivement à

$$\frac{\alpha + \beta}{(A' + B')(\alpha + \beta) - 2(A + B)} S u(cb' - bc')$$

et

$$\frac{2 S u(cb' - bc')}{(A' + B')(\alpha + \beta) - 2(A + B)}.$$

Si elles ne sont pas nulles, leur rapport $\alpha + \beta$ ne peut être indépendant de β. On doit donc avoir

$$S u(cb' - bc') = 0.$$

On retombe sur l'équation (33). Elle est, en général, vérifiée pour certaines valeurs particulières de α. Si l'on veut qu'elle le soit, quel que soit α, on est ramené à l'hypothèse où la développable Δ est un cône de sommet O, auquel cas (Σ) *coïncide avec* (S).

9. *Congruences* (G). — Nous ne pousserons pas plus loin l'étude des douze surfaces, car elle ne nous a

pas semblé devoir donner de résultats bien intéressants. Par contre, nous allons nous occuper spécialement de la surface (Σ) dans le cas où elle est réglée, B étant nul.

On sait que la droite MP est tangente en M à (S) et en P à (Σ); elle engendre *une congruence dont les deux nappes de la surface focale sont des surfaces réglées, sur lesquelles les génératrices rectilignes se correspondent.* Nous appellerons *congruence* (G) toute congruence jouissant de cette propriété.

Je dis que *toute congruence* (G) *peut être obtenue de la manière précédente.* En effet, soient (S) et (S′) les deux nappes de la surface focale d'une telle congruence, et M et M′ deux points homologues quelconques. On sait que lorsque MM′ engendre successivement les deux familles de développables de la congruence, les points M et M′ décrivent respectivement sur (S) et (S′) deux réseaux conjugués. D'autre part, par hypothèse, lorsque M décrit une droite D sur (S), M′ décrit une droite D′ sur (S′). Comme ces droites sont des lignes asymptotiques sur les surfaces qui les portent, on en conclut que les lignes asymptotiques de la seconde famille sont aussi des lignes homologues sur les deux surfaces ([1]). Dès lors, on peut

---

([1]) Cela resulte de la propriété générale suivante : *Si l'on établit entre deux surfaces quelconques* (S) *et* (S′) *une correspondance ponctuelle transformant deux réseaux particuliers de* (S) *en deux réseaux conjugués de* (S′), *les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces.* En effet, on sait qu'en deux points homologues M et M′, les tangentes homologues se correspondent homographiquement. Par suite les tangentes asymptotiques de (S), qui divisent harmoniquement les deux couples de tangentes (Mt, $M\theta$), (Mt_1, $M\theta_1$) aux deux réseaux proposés, ont pour homologues en M′ les deux tangentes asymptotiques de (S′), qui divisent harmoniquement les couples ($M't'$, $M'\theta'$), ($M't'_1$, $M'\theta'_1$), homologues des précédents par hypothèse.

appliquer le théorème de M. Guichard [1] et affirmer que la surface (S′) peut être déduite comme surface (Σ) de la surface (S). Or, nous avons reconnu tous les cas où (Σ) est une surface réglée dont les droites sont les lignes (α). Le cas de $A = 0$ ne donne rien, car (Σ) se confond avec (S); la congruence se réduit aux génératrices de (S). Il ne nous reste donc que le cas où $B = 0$, ce que nous voulions démontrer.

Finalement, *nous aurons la congruence* (G) *la plus générale en joignant les points* M *et* P *dont les coordonnées sont données par les formules* (D) *et* (36), *où l'on suppose* $B = 0$. On pourra même l'obtenir sans aucune quadrature, puisqu'on peut se débarrasser de celles qui figurent dans ξ, η, ζ, u, v, w (n° 2).

10. Posons maintenant le problème d'une manière un peu différente et plus symétrique. *Donnons-nous deux surfaces réglées sous la forme* (D). Nous aurons, par exemple, la surface (S) définie par les fonctions a, b, c de α; puis la surface (S_1) [2] définie par trois fonctions a_1, b_1, c_1 de α_1 au moyen des formules telles que la suivante :

$$(D_1) \qquad x_1 = \frac{2(c_1 b'_1 - b_1 c'_1)}{\alpha_1 + \beta_1} + \xi_1,$$

où l'on a posé

$$\xi_1 = \int (b'_1 c''_1 - c'_1 b''_1)\, d\alpha_1,$$

et où les accents indiquent des dérivées prises par rapport à α_1.

---

[1] *Cf.* G. DARBOUX, *loc. cit.*, n° 888.

[2] Bien entendu, cette surface n'a rien à voir avec la surface (S_1) des numéros précédents. Il en est de même de toutes les notations qui vont suivre.

Ceci étant, cherchons *quelles relations il faut établir entre* α *et* α_1, *d'une part, et entre* β *et* β_1, *d'autre part, et quelles conditions doivent remplir les fonctions* a, b, c, a_1, b_1, c_1 *pour que la droite* MM_1 *engendre une congruence* (G) *de surfaces focales* (S) *et* (S_1).

On pourrait répondre à cette question en s'appuyant sur le numéro précédent et identifiant la surface (S_1) avec la surface (Σ). Nous préférons employer la méthode directe suivante. Écrivons que MM_1 est tangente en M à (S) et en M_1 à (S_1); nous avons, en nous rappelant les cosinus directeurs de la normale en M à (S) (n° 6),

$$(37)\quad S\left(a' - \frac{2a}{\alpha+\beta}\right)\left(\xi_1 - \xi + \frac{2A_1}{\alpha_1+\beta_1} - \frac{2A}{\alpha+\beta}\right) = 0,$$

$$(38)\quad S\left(a'_1 - \frac{2a_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)\left(\xi - \xi_1 + \frac{2A}{\alpha+\beta} - \frac{2A_1}{\alpha_1+\beta_1}\right) = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger l'écriture,

$$A = cb' - bc', \qquad A_1 = c_1 b'_1 - b_1 c'_1.$$

L'équation (37), par exemple, est de la forme

$$(39)\quad \frac{m}{(\alpha+\beta)(\alpha_1+\beta_1)} + \frac{n}{\alpha+\beta} + \frac{p}{\alpha_1+\beta_1} + q = 0$$

avec

$$(40)\quad \begin{cases} m = -4 S a A_1 & n = -2 S a(\xi_1 - \xi), \\ p = 2 S a' A_1, & q = S a'(\xi_1 - \xi). \end{cases}$$

Si l'on y donne à α une valeur numérique quelconque, on obtient entre β et β_1 une relation homographique. En négligeant les transformations (14), (15), (16) effectuées, par exemple, sur (S), on peut supposer $\beta_1 = \beta$. Portant cette hypothèse dans (39), on a

$$(41)\quad q = 0, \qquad n + p = 0, \qquad m + n\alpha_1 + p\alpha = 0.$$

En portant dans (38), on aurait de même

$$(42)\quad q_1 = 0, \qquad n_1 + p_1 = 0, \qquad m_1 + n_1\alpha + p_1\alpha_1 = 0,$$

en appelant m_1, n_1, p_1, q_1 les quantités déduites de m, n, p, q par l'échange des lettres a, b, c et a_1, b_1, c_1.

Les équations $q = 0$, $q_1 = 0$ nous donnent d'abord

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_1 - \xi &= \rho(c'b'_1 - b'c'_1),\\ \eta_1 - \eta &= \rho(a'c'_1 - c'a'_1),\\ \zeta_1 - \zeta &= \rho(b'a'_1 - a'b'_1),\end{aligned}\right.$$

en appelant ρ un certain facteur de proportionnalité [1]. En portant ces valeurs dans n et n_1, on obtient

$$n = -\rho p_1, \qquad n_1 = -\rho p.$$

La deuxième équation (42) s'écrit alors

$$\rho^2 p + n = 0;$$

en la comparant avec la dernière équation (41) et remarquant que n et p ne peuvent être tous deux nuls, sans quoi m le serait aussi et D et D_1 seraient parallèles, on obtient $\rho^2 = 1$. Négligeant un changement de signe sur a, b, c, prenons $\rho = 1$. Nous n'avons plus maintenant que les trois équations suivantes à vérifier :

$$(44)\quad p = p_1, \qquad m + p(\alpha - \alpha_1) = 0, \qquad m_1 + p_1(\alpha_1 - \alpha) = 0.$$

La deuxième s'écrit

$$S[a'(\alpha - \alpha_1) - 2a]A_1 = 0,$$

---

(1) Ceci suppose toutefois qu'on n'a pas $\frac{a'_1}{a'} = \frac{b'_1}{b'} = \frac{c'_1}{c'}$. Mais s'il en était ainsi, on aurait manifestement $p = 0$; d'où $n = 0$, $m = 0$. Or, de $p = m = 0$, on déduirait $\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C}$; les génératrices D et D_1 seraient parallèles et, par suite, confondues (n° 8), ce qui donnerait une solution absurde.

comme on a, en outre, identiquement

$$S[a'(\alpha-\alpha_1)-2a]A=0$$

et que les mineurs $u=BC_1-CB_1$, $v=CA_1-AC_1$, $w=AB_1-BA_1$ ne sont pas tous nuls, on en conclut

$$a'(\alpha-\alpha_1)-2a=\lambda u,\qquad b'(\alpha-\alpha_1)-2b=\lambda v,$$
$$c'(\alpha-\alpha_1)-2c=\lambda w.$$

De même

$$a'_1(\alpha_1-\alpha)-2a_1=\lambda_1 u,\qquad b'_1(\alpha_1-\alpha)-2b_1=\lambda_1 v,$$
$$c'_1(\alpha_1-\alpha)-2c_1=\lambda_1 w.$$

On tire de là

$$2A=\lambda(c'v-b'w),\qquad 2A_1=\lambda_1(c'_1v-b'_1w);$$
$$p=\lambda_1 Sa'(c'_1v-b'_1w)=\lambda_1 Su(c'b'_1-b'c'_1),$$
$$p_1=\lambda\, Sa'_1(c'v-b'w)=\lambda\, Su(c'_1b'-b'_1c').$$

La condition $p=p_1$ nous donne alors $\lambda_1=-\lambda$, car nous avons vu que p et p_1 ne pouvaient être nuls. Nous avons donc

$$a'(\alpha-\alpha_1)-2a=a'_1(\alpha-\alpha_1)+2a_1$$

et les deux équations analogues. Ces trois égalités entraînent d'ailleurs visiblement les trois équations (44).

En résumé, *les conditions cherchées sont*

$$(\alpha-\alpha_1)(a'-a'_1)=2(a+a_1), \tag{45}$$
$$\xi_1-\xi=c'b'_1-b'c'_1, \tag{46}$$

et celles qui s'en déduisent par permutations circulaires. Les équations telles que (46) *ne servent d'ailleurs qu'à fixer les constantes d'intégration relatives à* ξ_1, η_1, ζ_1 quand on a choisi celles qui s'introduisent dans ξ, η, ζ. Je dis, en effet, que si l'on différentie (46), on obtient une conséquence des équations telles que (45). Effectivement, l'équation (46) différentiée peut s'écrire

$$(47)\quad (c''_1\, d\alpha_1 - c''\, d\alpha)(b' + b'_1) - (b''_1\, d\alpha_1 - b''\, d\alpha)(c' + c'_1) = 0.$$

Or, en différentiant (45), on obtient

$$(48)\quad (\alpha - \alpha_1)(a''_1\, d\alpha_1 - a''\, d\alpha) = -(d\alpha + d\alpha_1)(a' + a'_1);$$

et l'on voit bien que (47) est une conséquence des équations telles que (48).

On aperçoit facilement quel est le degré de généralité de la solution. On peut choisir arbitrairement a, b, c, c'est-à-dire (S), puis la relation entre α_1 et α. La fonction a_1 est alors donnée par l'équation différentielle linéaire (45), et les fonctions b_1 et c_1 par les équations analogues. Quant à la correspondance entre M et M_1, elle est fixée sur deux génératrices homologues par l'égalité $\beta = \beta_1$.

Rappelons, à ce propos, que *pour avoir les conditions demandées sous leur forme la plus générale*, il aurait fallu identifier les équations (37) et (38) avec une *relation homographique quelconque entre* β *et* β_1, soit

$$(49)\qquad m\beta\beta_1 + n\beta + p\beta_1 + q = 0.$$

On aurait eu des calculs beaucoup plus compliqués, qu'on peut éviter en faisant, après coup, sur la surface (S), par exemple, les changements de variables (n° 3)

$$\beta\left|\frac{n\beta + q}{-m\beta - p},\right. \quad \alpha\left|\frac{n\alpha - q}{m\alpha - p},\right. \quad a\left|\frac{a(mq - np)}{(m\alpha - p)^2}.\right.$$

Les équations (45) et (46) deviennent alors ([1])

$$(50)\qquad (m\alpha\alpha_1 - n\alpha - p\alpha_1 + q)(a' - a'_1) = 2[m(a\alpha_1 - a_1\alpha) + pa_1 - na],$$

$$(51)\qquad \xi_1 - \xi = c'b'_1 - b'c'_1 + \frac{4m(bc_1 - cb_1)}{m\alpha\alpha_1 - n\alpha - p\alpha_1 + q}.$$

On peut enfin, dans ces équations, changer les signes de a, b, c, ou de a_1, b_1, c_1.

11. *Enveloppes de quadriques.* — Les surfaces (S) et (S_1) étant supposées satisfaire aux conditions (45) et (46), cherchons le lieu de la droite MM_1 quand β seul varie. La correspondance entre M et M_1 étant homographique, ce lieu est une quadrique. C'est ce que vérifie un calcul élémentaire. Pour avoir les équations de la droite MM_1, il suffit de prendre celles des plans tangents en M à (S) et en M_1 à (S_1), ce qui donne de suite

$$(52)\qquad 2P - Q(\alpha + \beta) = 0, \qquad 2P_1 - Q_1(\alpha_1 + \beta) = 0,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$P_1 = Sa_1(x - \xi_1), \qquad Q_1 = Sa'_1(x - \xi_1).$$
$$P = Sa(x - \xi), \qquad Q = Sa'(x - \xi).$$

([1]) Pour faire rapidement le calcul de (51), il convient de remarquer que, si l'on affecte de l'indice zéro les anciennes variables, on a identiquement

$$\xi_0 + \frac{2(c_0 b'_0 - b_0 c'_0)}{\alpha_0 + \beta_0} \equiv \xi + \frac{2(cb' - bc')}{\alpha + \beta},$$

puisque la surface (S) ne change pas. Dès lors, on aura ξ_0 en faisant $\beta_0 = \infty$, donc $\beta = -\frac{p}{m}$. En portant dans (46), c'est-à-dire

$$\xi_1 - \xi_0 = c'_0 b'_1 - c'_0 b'_1,$$

et tenant compte de (50), on obtient (51).

Éliminant β, nous avons l'équation du lieu

$$(53) \qquad 2(PQ_1 - QP_1) + (\alpha_1 - \alpha)QQ_1 = 0,$$

ce qui représente bien une quadrique (Q).

Lorsque α varie, *cette quadrique touche constamment son enveloppe suivant les quatre côtés d'un quadrilatère gauche.* En effet, la courbe de contact comprend déjà les deux droites D et D_1, qui sont des génératrices de même système de la quadrique. Comme cette courbe est l'intersection de (Q) avec une autre surface du second degré [par exemple la surface (Q) infiniment voisine], elle est nécessairement constituée par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche (Ω), dont D et D_1 sont deux côtés opposés.

L'équation (53) *définit la famille de quadriques la plus générale jouissant de la propriété précédente;* car si l'on possède une telle famille, les génératrices de chaque système de la quadrique variable engendrent une congruence (G), laquelle peut être obtenue par le procédé ci-dessus (n° 9).

Nous connaissons deux côtés D et D_1 du quadrilatère (Ω). Je dis que *les deux autres côtés sont des tangentes asymptotiques communes à* (S) *et à* (S_1). On pourrait démontrer cette propriété analytiquement, en différentiant l'équation (53), de manière à avoir la caractéristique de la quadrique (Q). Mais les calculs sont assez longs et nous nous bornerons à indiquer la démonstration géométrique suivante.

Soit (H) l'hyperboloïde osculateur à (S) le long de (D); il est engendré, comme on sait, par les tangentes asymptotiques de (S) aux différents points de (D). Les quadriques (Q) et (H) se raccordent le long de (D); elles ont donc en commun deux génératrices (d) et (d_1) du système auquel n'appartient pas

(D). Soit (s) la surface engendrée par (d), par exemple. Nous allons montrer que (Q) se raccorde à (s) le long de (d). En effet, tout plan (Π) passant par (d) touche (Q), (s), (H) en trois points m, m', m'', qui se correspondent deux à deux homographiquement. Les points doubles de l'homographie (m', m'') sont confondus en M, car ce sont les points focaux de la droite (d), considérée comme appartenant à la congruence des tangentes asymptotiques de (S), puisque les surfaces (s) et (H) sont engendrées toutes deux par des droites de cette congruence [1]. Les points doubles de l'homographie (m, m'') sont également confondus en M, parce que les points de raccordement de (Q) et (H) relatifs à (d) sont eux-mêmes confondus en M. Il suit de là qu'on a deux relations de la forme

$$\frac{1}{\overline{Mm'}} - \frac{1}{\overline{Mm''}} = k, \quad \frac{1}{\overline{Mm}} - \frac{1}{\overline{Mm''}} = k' \quad (k, k' = \text{const.}),$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{Mm}} - \frac{1}{\overline{Mm'}} = k' - k = k''.$$

Or, la droite (d) appartient constamment à la congruence (G) et, par suite, (s) est tangente en M_1 à (S_1). Comme il en est de même de (Q), on voit que M_1 est à lui-même son homologue dans l'homographie (m, m'). Ceci prouve que k'' est nul et, par conséquent, que m' coïncide toujours avec m. Autrement dit, (Q) et (s) se raccordent le long de (d).

On prouverait de même que Q se raccorde le long

---

[1] Rappelons au lecteur que lorsque deux surfaces réglées ayant une génératrice (d) commune sont engendrées par des droites appartenant à une même congruence, leurs points de raccordement sur (d) sont les points focaux de cette droite.

de (d_1) à la surface (s_1) engendrée par cette droite. Finalement, *le quadrilatère* (Ω) *est bien constitué par les droites* (D), (D_1), (d) et (d_1) et l'on peut dire que *la surface réglée engendrée par chaque côté admet pour tangentes asymptotiques les deux côtés qui le rencontrent*, car les quatre côtés jouent évidemment le même rôle dans la question.

Réciproquement, *tout quadrilatère variable jouissant de cette propriété peut être obtenu de la manière précédente.*

En effet, imaginons que (Ω) soit un tel quadrilatère et considérons la quadrique (Q) tangente à (S) le long de (D) et passant par (D_1). Elle contient évidemment (d) et (d_1). De plus, le raisonnement fait plus haut s'applique sans aucune modification, car les surfaces (Q) et (s) admettent même plan tangent en M_1, à savoir le plan dM_1D_1. Donc, elles se raccordent le long de (d). De même (Q) est tangente à (s_1) le long de (d_1). Si maintenant l'on fait jouer à (d) et (d_1) les rôles de (D) et (D_1) et *vice versa*, on peut affirmer aussi que (Q) se raccorde à (S_1) suivant (D_1). Finalement, *le quadrilatère* (Ω) *est, à chaque instant, la courbe de contact de la quadrique* (G) *avec son enveloppe* et notre réciproque est démontrée [1].

12. Les considérations géométriques qui précèdent

---

[1] *On peut supposer seulement que les côtés opposés* (d) *et* (d_1) *sont tangentes asymptotiques de* (S) et (S_1). Il en résulte nécessairement que (D) et (D_1) sont tangentes asymptotiques de (s) et (s_1). En effet, (S) et (s) se raccordent tout le long de la courbe (Γ) lieu de M. Donc, la tangente en M à (Γ) a même conjuguée relativement à ces deux surfaces. En outre, (d) est tangente asymptotique à la fois pour (S) et (s). La deuxième tangente asymptotique est donc aussi la même pour les deux surfaces. Or, c'est (D) pour (S); donc aussi pour (s). On prouverait de même que (D) est tangente asymptotique de (s_1) et que (D_1) l'est pour (s) et (s_1).

nous permettent d'exposer maintenant *une nouvelle méthode de détermination des congruences* (G), ou, ce qui revient au même, des familles de quadriques (Q). Partant de la surface (S) donnée par les équations (D), nous allons former une quadrique (Q) se raccordant à (S) le long de (D) et contenant deux tangentes asymptotiques (d) et (d_1). Puis, nous écrirons que cette quadrique touche son enveloppe suivant ces deux droites.

Les équations de (D) sont

$$(54)\qquad P = 0, \qquad Q = 0.$$

Cherchons les équations de la tangente asymptotique (d) au point M de paramètre β. Nous avons d'abord l'équation (52) du plan tangent. Nous remarquons ensuite que les cosinus directeurs de (d) sont proportionnels aux quantités telles que

$$b'c'' - c'b'' + \frac{2(cb'' - bc'')}{\alpha + \beta} - \frac{2(cb' - bc')}{(\alpha + \beta)^2}.$$

Il est dès lors facile de vérifier que (d) est perpendiculaire à la direction dont les cosinus directeurs sont proportionnels à

$$a' - (\alpha + \beta)a'', \quad b' - (\alpha + \beta)b'', \quad c' - (\alpha + \beta)c''.$$

De là résulte l'équation d'un second plan contenant (d), à savoir

$$Q - 2\delta - R(\alpha + \beta) = 0,$$

en posant

$$R = S a''(x - \xi).$$

Les équations de (d) sont donc

$$(55)\qquad \begin{cases} P - mQ = 0 \\ Q - 2\delta - 2mR = 0 \end{cases} \qquad \left(m = \frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

De même, celles de (d_1) sont de la forme

$$(56) \qquad \begin{cases} P - nQ = 0, \\ Q - 2\delta - 2nR = 0. \end{cases}$$

Pour former la quadrique (Q), nous remarquons qu'elle fait partie du faisceau ponctuel déterminé par l'hyperboloïde osculateur (H) et par le couple de plans $P - mQ = 0$, $P - nQ = 0$. Or, l'équation de (H) s'obtient en éliminant m entre les équations (55), ce qui donne

$$(57) \qquad H \equiv 2PR - Q(Q - 2\delta) = 0.$$

L'équation de (Q) est donc de la forme

$$(58) \quad S \equiv 2PR - Q(Q - 2\delta) + t(P - mQ)(P - nQ) = 0.$$

Il faut à présent supposer que t, m, n sont trois fonctions de α et chercher la caractéristique de (Q). Dérivons donc (58) par rapport à α; il vient, en remarquant les identités

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = Q - \delta, \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = R, \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha} = -\lambda R - \mu Q - \nu P, \quad \frac{d\delta}{d\alpha} = -\lambda\delta,$$

dont les deux dernières sont obtenues en tenant compte de (18),

$$\begin{aligned}(59) \quad T \equiv & -2P(\lambda R + \mu Q + \nu P) \\ & - 2Q\lambda\delta + t'(P - mQ)(P - nQ) \\ & + t(P - mQ)(Q - \delta - nR - n'Q) \\ & + t(P - nQ)(Q - \delta - mR - m'Q) = 0.\end{aligned}$$

Il nous faut exprimer que la quadrique représentée par cette équation coupe (Q) suivant quatre droites, dont (D), (d) et (d_1). Elle passe déjà par (D). Si (d) et (d_1) sont distinctes, il suffit d'exprimer qu'elles vérifient identiquement (59); on est alors conduit très rapidement aux relations qui doivent exister entre t, m, n. Mais cette méthode est en défaut lorsque (d) et (d_1) viennent se confondre et, en outre, elle offre l'inconvénient de ne pas donner le quatrième côté (D_1) du quadrilatère (Ω). Aussi allons-nous suivre une autre marche.

Exprimons que la quadrique (59) fait partie du faisceau déterminé par (Q) et les deux plans (D, d), (D_1, d_1), lesquels ont pour équations respectives

$$P - mQ = 0, \qquad g(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR) = 0,$$

g et h désignant deux coefficients non déterminés. Nous devons avoir une identité de la forme

$$T \equiv kS + (P - mQ)[g(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR)]$$

ou

$$T \equiv kH + (P - mQ)[l(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR)],$$

en posant $l = g + tk$. Ceci doit avoir lieu quels que soient P, Q, R. Le calcul d'identification n'offre aucune difficulté et donne les résultats suivants :

$$(60) \quad l = t' - 2\nu, \qquad h = t, \qquad k = -\lambda + \frac{t(n-m)}{2},$$

$$(61) \qquad t\left(mn' + nm' - \frac{m+n}{2}\right) = \lambda - 2\nu mn,$$

$$(62) \qquad t(1 - m' - n') = 2\mu + 2\nu(m+n).$$

Les équations (61) *et* (62) *sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que la quadrique* (Q) *touche son enveloppe suivant un quadrilatère gauche.* On peut les mettre sous une autre forme, en éliminant successivement entre elles m' et n', ce qui se fait par les combinaisons linéaires $(61) + n(62)$

et $(61) + m(62)$; on obtient ainsi

$$(63) \qquad t(m-n)(1-2m') = 2(\lambda + 2\mu m + 2\nu m^2),$$
$$(64) \qquad t(n-m)(1-2n') = 2(\lambda + 2\mu n + 2\nu n^2).$$

Ce sont ces équations qu'on aurait obtenues par la méthode à laquelle il a été fait allusion tout à l'heure. Mais *elles ne forment un système équivalent à celui des équations* (61), (62) *que si* $m \neq n$.

Les côtés (D), (d) et (d_1) du quadrilatère (Ω) ont respectivement pour équations les équations (54), (55), (56). Quant au côté (D_1), il sera obtenu en coupant la quadrique (Q) par le plan

$$g(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR) = 0;$$

on trouve facilement qu'on peut prendre pour équations de (D_1)

$$(65) \quad \begin{cases} P\left[t' - 2\nu + t\lambda + \dfrac{t^2}{2}(m+n)\right] + tQ(1 - tmn) - 2t\delta = 0, \\ Pt^2 + Q\left[t' - 2\nu - t\lambda - \dfrac{t^2}{2}(m+n)\right] - 2tR = 0. \end{cases}$$

En éliminant t entre les équations (63) et (64) on voit qu'*on peut choisir arbitrairement la famille des droites* (d), *pourvu qu'elles soient tangentes asymptotiques de* (s), *les droites* (d_1) *étant alors déterminées par une équation de Riccati.*

13. Nous terminerons en examinant quelques cas particuliers intéressants obtenus en assujettissant le quadrilatère (Ω) à certaines conditions déterminées.

Exigeons, par exemple, *que* (Ω) *ait deux côtés confondus*. Ces côtés ne peuvent évidemment être que des côtés opposés.

Si ces côtés sont (D) et (D_1), les équations (65) doivent être équivalentes aux équations (54); ce qui se traduit par la condition nécessaire et suffisante $t = 0$. Dans ce cas, *la quadrique* (Q) *est donc l'hyperboloïde osculateur à* (S). Les équations (63), (64) nous montrent que m et n sont alors les racines de l'équation du second degré

$$(66) \qquad \lambda + 2\mu m + \nu m^2 = 0.$$

On peut dire aussi que les β des deux sommets doubles de (Ω) sont donnés par

$$2\lambda - 2\mu(\alpha + \beta) + \nu(\alpha + \beta)^2 = 0.$$

Dans le cas où cette équation admet une racine constante, on retrouve la condition (21) pour que (S) admette une directrice rectiligne. Pour que les deux autres côtés (d) et (d_1) soient aussi confondus, c'est-à-dire *pour que l'hyperboloïde osculateur à* (S) *soit en même temps osculateur à une autre surface réglée* (s), *il faut et suffit qu'on ait*

$$\mu^2 - 2\lambda\nu = 0.$$

Si les deux côtés (d) et (d_1) sont seuls confondus, on a $m = n$. Les équations (63), (64) se réduisent alors à (66). Quant à t, il est donné par exemple par (62). Réciproquement, si m satisfait à (66), on a, soit $t = 0$, soit $m = n$, en laissant de côté le cas où $m' = \frac{1}{2}$, qui donnerait $\beta =$ const. et conduirait à une droite (d) fixe et située sur (S).

Les tangentes asymptotiques (d') *et* (d'_1) *qui vérifient l'équation* (66) *sont caractérisées par la propriété d'avoir avec la surface un contact du troisième ordre.* On peut, en effet, les considérer comme situées sur deux hyperboloïdes osculateurs consécutifs

(H) et (H′). Or (H) contient trois génératrices consécutives 1, 2, 3 de (S); (H′) contient de même trois génératrices consécutives 2, 3, 4. Donc (d') et (d'_1) rencontrent les quatre génératrices consécutives 1, 2, 3, 4 et possèdent bien un contact du troisième ordre avec (S) [1]. Appelons-les *tangentes hyperasymptotiques* et appelons *surfaces hyperasymptotiques* de (S) les deux surfaces réglées (s') et (s'_1) qu'elles engendrent. Les remarques faites plus haut nous permettent alors d'énoncer la proposition suivante :

Si une surface réglée (s') est hyperasymptotique pour une autre surface réglée (S), *inversement* (S) *est hyperasymptotique pour* (s').

On peut affirmer également que *si une quadrique variable* (Q) *touche constamment son enveloppe suivant un quadrilatère gauche dont deux côtés consécutifs sont l'un pour l'autre des tangentes hyperasymptotiques, un troisième côté se confond nécessairement avec l'un des précédents.*

Pendant qu'il est question de l'hyperboloïde osculateur, nous ferons observer que l'équation (57) se

---

[1] Analytiquement, on peut raisonner comme il suit. Soient x_1, x_2, ..., x_6, les coordonnées de Klein de la droite (D) qui engendre (S); ce sont des fonctions du paramètre α. La demi-quadrique (H) formée par les tangentes asymptotiques est définie par les trois équations

$$(1) \qquad \Sigma X_i x_i = 0, \qquad \Sigma X_i x'_i = 0, \qquad \Sigma X_i x''_i = 0,$$

où X_1, X_2, ..., X_6 sont les coordonnées kleinéennes courantes. Les deux droites (d') et (d'_1) de (H) qui font partie de la caractéristique sont déterminées par les équations (1) et celles qu'on en déduit en dérivant par rapport à α, ce qui donne seulement la nouvelle équation $\Sigma X_i x'''_i = 0$. Or, ces quatre équations expriment précisément que l'équation aux α des points d'intersection de (S) avec la droite (X_i) admet une racine quadruple, c'est-à-dire qu'il y a contact du troisième ordre.

prête très bien à son étude. C'est ainsi que le centre ω est donné par

$$P = 0, \qquad Q = \delta, \qquad R = 0;$$

d'où l'on tire

$$x - \xi = cb'' - bc'', \quad y - \eta = ac'' - ca'', \quad z - \zeta = ba'' - ab''.$$

Cherchons *les surfaces réglées dont l'hyperboloïde osculateur relatif à chaque génératrice a un sommet sur cette génératrice.*

Il suffit d'écrire que la droite $M\omega$ est perpendiculaire au plan tangent en M. Or, si l'on remarque que, pour le point M, on a $P = 0$, $Q = 0$, $R = \frac{-2\delta}{\alpha+\beta}$, on voit de suite que deux plans passant par $M\omega$ sont les suivants :

$$P = 0, \qquad 2Q - R(\alpha + \beta) - 2\delta = 0.$$

Écrivons qu'ils sont perpendiculaires au plan tangent (52); nous avons, en conservant les notations du n° 6, et remarquant que

$$S aa'' = \rho\rho'' + \rho'^2 - \sigma^2,$$

$$\alpha + \beta = \frac{2\rho}{\rho'},$$

$$4\rho\rho' - 2(\alpha+\beta)(\rho\rho'' + \rho'^2 - \sigma^2)$$
$$- 2(\alpha+\beta)\sigma^2 + (\alpha+\beta)^2\sigma\sigma' = 0.$$

La première équation nous montre que *le sommet en question doit être au point central*, ce qui est d'ailleurs évident géométriquement, car (S) et (H) ont même point central. La seconde devient, en tenant compte de la première,

$$\rho'\rho'' = \sigma\sigma'$$

ou

$$\rho'^2 - \sigma^2 = \text{const.}$$

Donc *les surfaces cherchées sont celles dont le paramètre de distribution est constant.*

En particulier, *si l'hyperboloïde osculateur est constamment de révolution,* on se trouve nécessairement dans le cas précédent. Mais il y a une condition supplémentaire qui est

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = \rho''^2.$$

On peut le voir aisément en formant l'équation en S de l'hyperboloïde; mais nous laisserons au lecteur le soin de le faire et nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet.

14. Revenons au quadrilatère (Ω) pour signaler d'autres cas particuliers.

Exigeons par exemple que *deux côtés soient parallèles.* Ce seront nécessairement deux côtés consécutifs qu'on peut toujours supposer être (D) et (d). Alors (d) sera la tangente asymptotique au point à l'infini de (D). Elle est obtenue en faisant $m = 0$ dans (55). On a ensuite

$$tn = -2\lambda. \tag{67}$$

$$n' = 1 + \frac{\mu}{\lambda} n + \frac{\nu}{\lambda} n^2. \tag{68}$$

Pour que (d) soit tangente hyperasymptotique, il faut et suffit que λ soit nul. Pour que (D_1) se confonde avec (D) et (d_1) avec (d), les droites (d) et (D) demeurant toujours parallèles, il faut et suffit qu'on ait $\lambda = \mu = 0$. Ceci nous donne évidemment la solution du problème suivant : *Trouver deux surfaces réglées* (S) *et* (s) *dont les génératrices soient deux à deux parallèles et telles que l'hyperboloïde osculateur à* (S) *le long d'une génératrice quelconque soit* *osculateur à* (s) *le long de la génératrice parallèle.*

Les droites (D) *et* (d) *étant toujours supposées parallèles, cherchons la condition pour que les deux autres côtés* (D_1) *et* (d_1) *le soient également.* En se servant des équations (56) et (65), on trouve l'unique condition

$$n\left(t' - 2\nu + t\lambda - \frac{t^2 n}{2}\right) + t = 0$$

qui devient, en tenant compte de (67),

$$n' = 1 + \frac{\lambda'}{\lambda} n + \frac{\nu}{\lambda} n^2.$$

En comparant avec (68), on voit que *la condition nécessaire et suffisante cherchée est* $\lambda' = \mu$. Si elle est remplie, toutes les quadriques touchant leur enveloppe suivant (D) et une droite parallèle ne peuvent la toucher suivant deux autres droites sans que celles-ci soient également parallèles.