NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CAMILLE DENQUIN

Sur quelques séries numériques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 127-135

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__127_1>

[D2b]

SUR QUELQUES SÉRIES NUMÉRIQUES;

PAR M. CAMILLE DENQUIN.

I. La formule connue

(1) $$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

qui équivaut, ainsi qu'on le reconnaît immédiatement, à la formule

$$(2)\qquad A = \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots,$$

s'établit d'habitude, soit en comparant les développements de $\sin x$ en série et en produit infini, soit en développant la fonction x^2 en série de Fourier.

Je me suis proposé d'établir directement la formule (2) en la rattachant à la formule de Leibniz,

$$(3)\qquad B = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

par une élévation au carré. Comme la série (3) n'est pas absolument convergente, la règle ordinaire de multiplication des séries n'est pas applicable, et il faut des précautions spéciales pour mettre les calculs à l'abri de toute objection.

La méthode que j'ai employée conduit à la sommation d'une série numérique double intéressante : la formule (11) qu'on trouvera plus loin paraît nouvelle.

II. Nous établirons d'abord une formule de sommation pour la série

$$(4)\qquad C_q = \frac{2}{1(2q+1)} + \frac{2}{3(2q+3)} + \frac{2}{5(2q+5)} + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{(2n+1)(2q+2n+1)}.$$

Cette série, où q désigne un entier positif arbitraire, est évidemment convergente.

Écrivons successivement

$$\frac{2q}{1(2q+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2q+1},$$

$$\frac{2q}{3(2q+3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2q+3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{2q}{(2q-1)(4q-1)} = \frac{1}{2q-1} - \frac{1}{4q-1},$$

$$\frac{2q}{(2q+1)(4q+1)} = \frac{1}{2q+1} - \frac{1}{4q+1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{2q}{(2n+1)(2q+2n+1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2q+2n+1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En ajoutant toutes ces égalités, et en tenant compte des termes qui se détruisent, on trouve

$$q\,C_q = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2q-1}.$$

En doublant, et réunissant dans le second membre les termes équidistants des extrêmes, il vient

$$2q\,C_q = \frac{2q}{1(2q-1)} + \frac{2q}{3(2q-3)} + \ldots + \frac{2q}{(2q-3)3} + \frac{2q}{(2q-1)1}$$

et finalement

$$(5)\qquad C_q = \sum_{r=0}^{r=q-1} \frac{1}{(2r+1)(2q-2r-1)}.$$

III. Dans la suite du raisonnement, nous introduirons la série double ayant pour terme général

$$(6)\quad u_{m,n} = \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+3)} - \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+5)}$$
$$= \frac{4}{(2n+1)(2n+4m+3)(2n+4m+5)},$$

m et n prenant séparément les valeurs 0, 1, 2, ... En vertu d'un théorème général ([1]), cette série à termes positifs est convergente, car $u_{m,n}$ est de la forme $\frac{1}{f(m,n)}$, f étant un polynome de degré supérieur à 2.

Nous poserons

$$D = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{m,n}. \tag{7}$$

Les termes $u_{m,n}$ peuvent être écrits dans un ordre quelconque, sans que la somme D soit modifiée.

IV. Il est facile d'établir une relation entre la série D et les séries C_q considérées plus haut (4).

On a, en effet, en donnant à q successivement les valeurs $2m+1$ et $2m+2$,

$$C_{2m+1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+3)},$$

$$C_{2m+2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+5)};$$

d'où, en retranchant ces séries terme à terme,

$$C_{2m+1} - C_{2m+2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{m,n}.$$

Donnons à m successivement les valeurs 0, 1, 2, ... et ajoutons; il vient, en profitant de ce que les termes de la série D peuvent être écrits dans un ordre arbitraire

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} (C_{2m+1} - C_{2m+2}) = D. \tag{8}$$

([1]) *Voir*, par exemple, JORDAN, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 304.

V. Cela posé, considérons un nombre *fini* de termes de la série de Leibniz, et écrivons

$$B_p = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{4p-1} + \frac{1}{4p+1}.$$

Élevons au carré, en écrivant d'abord les carrés des termes du second membre, puis les doubles produits négatifs, puis les doubles produits positifs. Il vient

$$\begin{aligned} B_p^2 = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(4p+1)^2} \\ - \sum \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+3)} \\ + \sum \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+5)}. \end{aligned}$$

Dans les deux Σ, m et n sont des entiers positifs ou nuls. Dans le premier Σ, $2n+4m+3$ est au plus égal à $4p+1$. Dans le second Σ, $2n+4m+5$ est au plus égal à $4p+1$.

Il est clair qu'à tout terme du second Σ correspond un terme du premier, pour lequel m et n ont respectivement les mêmes valeurs. En réunissant deux à deux les termes correspondants, il ne restera dans le premier Σ que les termes pour lesquels $2n+4m+3$ est égal à $4p+1$. On écrira donc

$$\begin{aligned} B_p^2 = 1 + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{(4p+1)^2} \\ - \sum \left[\frac{2}{(2n+1)(2n+4m+3)} - \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+5)} \right] \\ - \frac{2}{4p+1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{4p-1} \right). \end{aligned}$$

Rappelons que, dans le Σ de la seconde ligne, n et m sont tels que

$$2n + 4m + 5 \leqq 4p + 1.$$

Faisons maintenant croître p indéfiniment; la première ligne du second membre tend vers la somme

$$A = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \ldots$$

La seconde ligne tend vers $-$ D, somme changée de signe de la série double introduite au n° III. Quant au terme complémentaire

$$-\frac{2}{4p+1}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{4p-1}\right),$$

il tend vers zéro; en effet, la somme entre parenthèses est moindre que la somme des $4p - 1$ premiers termes de la série harmonique, somme asymptotique, comme on sait, à $L(4p-1)$. Donc, etc.

Enfin B_p tend vers $B = \frac{\pi}{4}$. On a donc

$$B^2 = \frac{\pi^2}{16} = A - D. \tag{9}$$

VI. Nous obtiendrons une autre relation en écrivant B_p d'une manière différente, à savoir en groupant les produits de fractions dont les dénominateurs ont la même somme. On trouve ainsi

$$B_p^2 = P + Q,$$

en posant

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{1} \\ & - \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.1}\right) \\ & + \left(\frac{1}{1.5} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.1}\right) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[\frac{1}{1(4p-3)} + \ldots + \frac{1}{(4p-3)1}\right] \\ & - \left[\frac{1}{1(4p-1)} + \ldots + \frac{1}{(4p-1)1}\right] \end{aligned}$$

et

$$Q = \left[\frac{1}{1(4p+1)} + \ldots + \frac{1}{(4p+1)1}\right]$$
$$- \left[\frac{1}{3(4p+1)} + \ldots + \frac{1}{(4p+1)3}\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \left[\frac{1}{(4p-1)(4p+1)} - \frac{1}{(4p+1)(4p-1)}\right]$$
$$+ \frac{1}{(4p+1)^2}.$$

On voit tout d'abord que les termes de la somme alternée égale à P sont, d'après la formule (5), égaux en valeur absolue aux sommes successives $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$. On a donc

$$P = (C_1 - C_2) + \ldots + (C_{2p-1} - C_{2p}).$$

Si l'on fait croître p indéfiniment, le second membre de cette égalité tend vers D, ainsi qu'on l'a vu [formule (8)].

En second lieu, Q se présente sous la forme d'une somme alternée dont les termes décroissent visiblement en valeur absolue. On a donc

$$0 < Q < \frac{1}{1(4p+1)} + \ldots + \frac{1}{(4p+1)1}.$$

La somme qui figure dans le dernier membre des inégalités précédentes peut s'écrire

$$\frac{1}{(2p+1)}\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{4p+1}\right).$$

Elle tend donc vers zéro, quand p augmente indéfiniment. Il en est par suite de même de Q.

On a donc, en résumé,

$$B^2 = \frac{\pi^2}{16} = D, \tag{10}$$

ce qui, rapproché de la formule (9), donne

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots=A=\frac{\pi^2}{8} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VII. Il résulte, comme on le voit, de l'égalité (10) et de la définition de D que l'on a

$$(11) \quad \sum_0^\infty\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)(2n+4m+3)(2n+4m+5)}=\frac{\pi^2}{64}.$$

Cette formule peut être généralisée de la façon suivante : posons

$$E_1=\sum_0^\infty\sum_0^\infty \frac{2}{(1+2n)(3+2n+4m_1)(5+2n+4m_1)}$$

$$E_2=\sum_0^\infty\sum_0^\infty\sum_0^\infty \frac{2}{\left[\begin{array}{l}(1+2n)(3+2n+4m_1)\\ \quad\times(5+2n+4m_1+4m_2)(7+2n+4m_1+4m_2)\end{array}\right]}$$

et ainsi de suite.

E_1 n'est autre que $\frac{D}{2}$, et le mode de génération des sommes double, triple, etc., est suffisamment indiqué, E_p étant une somme multiple d'ordre $p+1$ (variables n, m_1, m_2, ..., m_p).

Cela posé, en se servant du développement de $\cos x$ en produit infini, il est facile de vérifier que l'on a

$$E_1=\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \quad E_2=\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \quad \ldots, \quad E_p=\frac{1}{(p+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{p+1}.$$

Il serait intéressant de démontrer directement la formule de récurrence

$$E_p=\frac{1}{p+1}\frac{\pi}{4}E_{p-1}.$$

Par ailleurs, on pourrait, comme autre généralisation de la formule (11), chercher des formules de sommation pour les séries doubles ayant comme terme général

$$u_{m,n} = \frac{1}{(am + bn + c)(a'm + b'n + c')(a''m - b''n + c')},$$

a, b, ..., c'' étant des constantes *a priori* quelconques.