Nouvelles annales de mathématiques

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 93-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__93_1>

QUESTIONS.

2169. — Si la courbe (M) est le lieu des points M d'où l'on peut mener à deux courbes données (A) et (B) des tangentes MA et MB égales entre elles, et si α et β sont les centres de courbure répondant respectivement aux points A et B :

1° La tangente en M à la courbe (M) est perpendiculaire à la droite $\alpha\beta$;

2° Le point où la droite AB touche son enveloppe est à sa rencontre avec la droite $\alpha\beta$.

(M. D'OCAGNE.)

2170. On donne une courbe plane (C) et un point fixe O dans son plan. On porte sur la tangente en un point M de (C) une longueur MP égale au rayon vecteur OM. Déterminer la tangente en P à la courbe lieu de ce point.

A. Duby.

2171. Étant donnés dans un plan un point et deux droites parallèles, on considère une sphère variable ayant pour diamètre le segment intercepté par les deux parallèles sur une droite tournant autour du point. Montrer que l'enveloppe de cette sphère est un ellipsoïde de révolution aplati ou bien un hyperboloïde de révolution à une nappe, suivant la position du point fixe par rapport aux deux parallèles.

Klug.

2172. Dans le triangle ABC on mène les droites AD, BE, CF, qui se coupent en un point P. Soit Q la conique circonscrite à ABC et tangente en A, B, C aux parallèles à EF, FD, DE.

I. Les parallèles à PA, PB, PC, menées par un point O de Q, coupent BC, CA, AB en λ, μ, ν. et l'on a la droite $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$.

II. En permutant les points O et P, on a une seconde droite $\Delta'(\lambda', \mu', \nu')$.

III. Les droites Δ et Δ' se coupent au milieu ω de OP.

Cas où P est l'orthocentre de ABC. P. Sondat.

2173. On donne un point P dans le plan d'un triangle ABC.

I. Trouver un second point P_1, à distance finie, tel qu'en menant par P_1 les parallèles à PA, PB, PC, coupant BC, CA, AB en (λ, μ_1, ν_2), (λ_2, μ, ν_1), (λ_1, μ_2, ν), on ait les trois droites $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$, $\Delta_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $\Delta_2(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$.

II. Quand P est à l'infini, P_1 est un point *quelconque* du plan autre que P.

III. Si P est le centre de gravité G de MBC, P_1 est un point *quelconque* de l'ellipse Q circonscrite et de centre G.

IV. Si Δ', Δ'_1, Δ'_2 sont les droites relatives au point P'_1, diamétral à P_1, les quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ'_1, Δ'_2 se coupent sur Q et le triangle (Δ, Δ', P_1, P'_1) est inscrit dans l'ellipse g tangente aux milieux des côtés de ABC.

V. Quand P est sur Q, P_1 est en G, et le triangle ($\Delta\Delta_1\Delta_2$) est inscrit dans Q, circonscrit à g et *équivalent* à ABC.

VI. Si P n'est ni à l'infini ni sur Q, les points P et P_1 sont *réversibles*. P. SONDAT.

2174. Si un point O décrit le cercle ABC, on sait que les parallèles à OA, OB, OC, menées par l'orthocentre P du triangle ABC, coupent BC, CA, AB en trois points en ligne droite [1].

Démontrer que cette droite Δ enveloppe la conique Q inscrite à ABC et concentrique au cercle d'Euler.

Si Δ_1 est la droite correspondant au point O_1, diamétralement opposé à O, le point $O'(\Delta\Delta_1)$ décrit la directrice $\Delta'(\lambda', \mu', \nu')$ de Q, relative à son foyer P, et qu'on obtient en menant les parallèles $P\lambda'$, $P\mu'$, $P\nu'$, aux tangentes en A, B, C.

La corde II_1 des contacts tourne autour de P en restant perpendiculaire à PO'. P. SONDAT.

2175. Soient A', B', C' trois points pris sur les côtés d'un triangle ABC, de telle manière que les droites AA', BB', CC' soient concourantes; soient α, β, γ trois points pris sur les côtés du triangle A'B'C' de telle manière que les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ soient concourantes. Démontrer que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes. GIRAUDON.

2176. On considère une parabole P et une droite D perpendiculaire à l'axe de P. Soient : A, B, C, les pieds des normales à P abaissées d'un point quelconque M de D; A_1, B_1, C_1 les points de Frégier, et A_2, B_2, C_2 les centres de courbure relatifs à A, B, C. On a, entre les aires des trois

[1] *Voir* les *Nouvelles Annales*, 1907, p. 332.

triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, les relations

$$ABC = A_1B_1C_1, \qquad \frac{ABC}{A_2B_2C_2} = \text{const.}$$

E.-N. Barisien.

2177. On donne deux cercles concentriques C et C′ et un point A. Une droite quelconque passant par A rencontre C′ en P et Q. Le lieu des sommets du quadrilatère formé par les quatre tangentes à C issues de P et Q se compose d'une conique et de deux droites. E.-N. Barisien.

2178. On donne une ellipse E et un point P sur le grand axe, et l'on considère une corde variable PAB. Le lieu des centres de similitude des cercles décrits sur PA et PB comme diamètres se compose du grand axe et d'une droite perpendiculaire au grand axe. E.-N. Barisien.

2179. Soient une ellipse E, d'axes $2a$ et $2b$, et ses deux cercles de Chasles C et C′, concentriques à E et de rayons $(a+b)$ et $(a-b)$. Il existe une infinité de triangles MPQ qui sont inscrits à C et circonscrits à E, en M′, P′, Q′.

Montrer que :

1° Les normales à E en M′, P′, Q′ sont concourantes et que le lieu de leur point de concours est le cercle de Chasles C′;

2° Le lieu de l'orthocentre du triangle MPQ est le même cercle C′;

3° Les droites MM′, PP′, QQ′ sont normales à une même ellipse fixe;

4° Les droites PQ et P′Q′ ont leur point de concours sur une *kreuzcurve*. E.-N. Barisien.

2180. Démontrer la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\omega \cos 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

E.-N. Barisien.