NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 81-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__81_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les séries de polynomes a une variable complexe, par *Paul Montel*. — 1 volume in-8 de vi-128 pages de la *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Le Livre de M. Paul Montel appartient à cette belle *Collection de monographies sur la théorie des fonctions* qui, fondée par M. Émile Borel en 1898, n'a pas cessé de s'enrichir presque chaque année de quelque nouveau Volume. On sait quelle heureuse influence a exercée cette Collection sur les études mathématiques, mais il ne faudrait pas, à mon avis, attribuer uniquement son succès à l'importance prise de nos jours par la théorie des fonctions : des livres rédigés suivant la même conception pédagogique et relatifs à d'autres branches des Mathématiques auraient sans doute le même succès. Et il ne sera pas inutile de dire quelle est cette conception pédagogique à propos du Livre de M. Montel qui la réalise au plus haut degré.

Les Livres de la *Collection Borel* ne supposent chez le lecteur que les premières notions de l'Analyse ; dans chaque Livre, les premiers Chapitres mettent le lecteur au courant des notions classiques dont il a besoin pour comprendre les Chapitres suivants ; ceux-ci contiennent, sous forme didactique, l'exposé de travaux plus récents, parus dans divers Mémoires, et en même temps les recherches personnelles de l'auteur. Le Livre ainsi conçu tient à la fois du Traité et du Mémoire original ; sa lecture est d'une utilité capitale pour l'étudiant qui veut apprendre à travailler sur les Mémoires originaux et pour tout lecteur qui veut s'initier rapidement aux résultats fondamentaux d'une théorie, sans avoir le temps de faire un choix dans la multitude d'écrits relatifs à cette théorie.

Le Livre de M. Paul Montel remplit parfaitement le but que je viens d'indiquer, en ce qui concerne l'étude des séries de polynomes à une variable complexe. Ce Livre devait être primitivement écrit par M. Émile Borel, qui annonçait sa publication ultérieure dans la préface de ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes;* mais, après les travaux fort importants de M. Montel parus depuis lors, il a semblé à M. Borel que nul n'était mieux qualifié que M. Montel lui-même pour traiter le sujet annoncé.

Dans le Chapitre premier, l'auteur, après avoir rappelé les notions fondamentales sur les ensembles de points dans le plan, les fonctions analytiques et leurs points singuliers, la représentation conforme, étudie les séries de fonctions analytiques, puis les familles de fonctions holomorphes *bornées en module* dans un domaine; au sujet de ces dernières familles, M. Montel établit cette proposition fondamentale, qu'il a donnée le premier dans sa thèse et dont il a montré toute l'importance : *on peut former avec les fonctions d'une pareille famille une suite infinie convergeant uniformément dans le domaine.* Le Chapitre se termine par quelques définitions relatives aux séries de polynomes et par les théorèmes de M. Hadamard et de M. Hurwitz relatifs, le premier à la multiplication, le second à l'addition des singularités de deux fonctions analytiques.

Le Chapitre II est consacré à diverses méthodes de développement d'une fonction holomorphe en série de polynomes dans un domaine D. L'auteur démontre le théorème donné par M. Painlevé pour le cas où le domaine D est limité par un contour convexe, puis il expose la méthode de M. Hilbert relative à un domaine D limité par une courbe simple quelconque : cette méthode est rattachée aux polynomes d'interpolation de Lagrange; vient ensuite la méthode de M. Runge pour le développement d'une fonction analytique uniforme en une série de fractions rationnelles convergente dans la région d'existence de cette fonction, méthode que l'auteur rapproche de celle donnée par M. Appell pour les domaines D limités par des arcs de cercle; la fin du Chapitre est consacrée à l'étude fort intéressante des polynomes d'approximation de Tchebicheff.

Le Chapitre III nous donne de nouvelles méthodes de développement d'une fonction holomorphe en séries de polynomes. Une des plus intéressantes, celle de M. Faber, occupe la plus grande partie du Chapitre. M. Faber démontre que toute fonction holomorphe dans un domaine D limité par un contour simple est la somme d'une série $\Sigma a_n P_n(x)$, où les polynomes $P_n(x)$ ne dépendent que du domaine, tandis que les constantes a_n ne dépendent que de la fonction; si le domaine est l'intérieur d'un cercle de centre a, on prend $P_n(x)$ égal à $(x - a)^n$ et l'on retrouve la série de Taylor; on retrouve de même, en faisant varier le domaine, divers autres développements connus, par exemple ceux dans lesquels les P_n sont les polynomes de Legendre.

Le Chapitre IV est relatif aux séries de polynomes convergentes dans plusieurs domaines extérieurs les uns aux autres; des exemples classiques montrent qu'une pareille série peut représenter, dans ces divers domaines D_1, D_2, ..., des fonctions analytiques différentes f_1, f_2, ... M. Montel montre, pour le cas d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de domaines D, que les fonctions f_1, f_2, ..., aussi bien que les domaines D_1, D_2, ..., peuvent être complètement arbitraires. L'auteur s'occupe ensuite du développement en série de polynomes d'une fonction analytique uniforme ayant des points singuliers; cette étude le conduit à montrer, avec M. Runge, que la région d'existence d'une pareille fonction n'est assujettie qu'à la seule restriction d'être d'un seul tenant et de ne contenir aucun point frontière.

Dans le Chapitre V, l'auteur considère *a priori* une série de polynomes convergente dans un domaine, ou, ce qui revient au même, une suite convergente de polynomes, et il se propose d'étudier la nature de la fonction limite. En particulier, dans quel cas cette somme est-elle analytique? M. Montel montre, par des exemples, que, parmi les diverses conditions qui ont été données, aucune n'est à la fois nécessaire et suffisante. Une notion importante, due à M. Montel, est celle de points de convergence *réguliers* ou *irréguliers;* un point de convergence P est dit régulier si, dans un cercle de centre P et de rayon suffisamment petit, la convergence est uniforme. M. Montel étudie l'ensemble des points irréguliers et il donne diverses propriétés remarquables des suites de polynomes dans le voisinage de leurs points de convergence irréguliers.

L'Ouvrage de M. Montel est d'une lecture fort intéressante, non seulement à cause de l'attrait présenté par le sujet lui-même. mais encore à cause de la façon simple, pédagogique dont nous sont présentés les résultats des divers travaux originaux que l'auteur nous fait connaître en même temps que ses travaux personnels.

S. Lattès.

Les fonctions polyédriques et modulaires; par *G. Vivanti*, Professeur à la Faculté des Sciences de Pavie. (Ouvrage traduit par *A. Cahen.*) — 1 vol. in-8 de 320 pages. (Prix : 12 fr.). Paris, Gauthier-Villars, éditeur; 1910.

Faire passer à travers le bloc compact des œuvres des grands mathématiciens de langue allemande le clair et pur rayon du génie latin. tel est le but de M. Vivanti, et comme il a traité jadis Sophus Lie, il traite maintenant Félix Klein.

L'organisation des Universités italiennes a favorisé sa tâche: là, à côté des enseignements traditionnels et de fondation, il y a place pour les disciplines nouvelles, alors que chez nous la fatale fragmentation de la licence en certificats et la loi du moindre effort qui guide nos étudiants dans le libre choix des certificats s'opposent à tout progrès, si même elles ne conduisent à l'incohérence des études.

Dans une série de 34 leçons en 1901-1902 à Messine, *Sulla teoria della resoluzione della equazioni di quinta grado*, M. Vivanti a présenté la substance des *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* de Klein (Leipzig, 1884); de ce cours, l'ossature si nette, si élégante, a été signalée aux lecteurs des *Nouvelles Annales* en janvier 1905. Une série analogue, en 1902-1903, *Sulla teoria delle funzioni modulari*, a fait connaître l'essentiel des *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, de Klein et Fricke (Leipzig, 1890-1892).

Les Leçons de M. Vivanti, recueillies par les étudiants et autographiées, ont servi de base à un livre plus réduit, plus condensé, où, pour éviter des redites et pour mieux montrer la filiation des théories, l'auteur étudie d'une part les groupes polyédriques et le groupe modulaire, puis d'autre part les fonctions et équations polyédriques et modulaires : ces *Elementi della Teoria delle funzioni poliedriche e modulari* (Milan, 1906). M. Armand Cahen, Professeur au Lycée d'Évreux, a eu la bonne idée de les traduire, il l'a fait avec précision et souplesse, et M. Gauthier-Villars, qui, en fait, a en France le monopole des belles éditions mathématiques, en a volontiers entrepris la publication. Envers tous deux, quiconque s'intéresse en France aux hautes Mathématiques sera très redevable.

Après avoir étudié *in abstracto* les propriétés des groupes d'opérations, M. Vivanti en fait l'application aux substitutions linéaires, dont il se propose notamment de déterminer tous les groupes finis possibles. Une interprétation géométrique simple permet de passer des groupes de substitutions linéaires aux groupes de rotations d'une sphère sur elle-même : de ces groupes, ceux qui sont finis se rattachent étroitement aux polyèdres réguliers que certaines rotations superposent à eux-mêmes (de là le nom de groupes polyédriques). Après les avoir soigneusement étudiés aux points de vue analytique et géométrique, l'auteur en déduit la représentation des groupes finis sur le plan. Les réseaux de triangles curvilignes qu'on est ainsi conduit à considérer possèdent un certain nombre de propriétés : les réseaux qui n'en possèdent que quelques-unes sont aussi envisagés en vue de leur utilisation ultérieure, notamment dans l'étude de l'unique groupe infini dont il est question ici, le groupe modulaire. Ce groupe est considéré, non à partir de sa définition arithmétique, mais à partir de son *champ fondamental :* ses propriétés et celles de ses sous-groupes sont l'objet d'un examen détaillé. Il me semble que, pour terminer cette Partie, l'auteur ou le traducteur aurait pu ajouter un Chapitre sur les groupes fuchsiens et kleinéens de M. Poincaré, quitte à se borner à un aperçu analogue à celui que donne M. Forsyth dans sa *Theory of Functions :* c'eût été une invitation à pénétrer dans un domaine découvert par notre illustre compatriote et resté peu exploré.

A la notion de groupe se rattache celle d'invariant. L'étude des invariants liés aux groupes précédents constitue la seconde Partie du Livre. Les formes invariantes fondamentales des groupes finis une fois construites, M. Vivanti aborde les fonctions polyédriques ou fonctions rationnelles d'une variable, que n'altère aucune des substitutions d'un groupe polyédrique, Toute telle fonction est complètement déterminée quand on connaît les valeurs qu'elle prend en trois points du plan. Cette propriété, sans équivalent dans le cas de plus d'une variable et qui est l'origine de la simplicité des applications, a son analogue pour le groupe modulaire. La théorie des fonctions elliptiques fournit la construction de la fonction modulaire principale J, de laquelle l'auteur passe aux fonctions modulaires invariantes dans un sous-groupe du groupe modulaire.

Viennent alors les applications. Les équations polyédriques ou modulaires sont celles qui définissent les valeurs de la variable pour lesquelles une fonction polyédrique ou modulaire prend une valeur donnée (l'expression *équation modulaire* est employée ici, on le voit, dans un sens tout différent que dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques) : leur résolution s'effectue par une méthode uniforme, basée sur la considération de l'équation différentielle de Schwartz, laquelle se rattache à l'équation hypergéométrique de Gauss. Les mêmes équations sont ensuite étudiées au point de vue algébrique et en considérant les résolvantes de Galois. Le Livre s'achève par l'examen des rapports des équations polyédriques avec la résolution algébrique des équations de degré trois, quatre ou cinq. Nous avons regretté de ne pas voir traiter le beau problème de l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients rationnels. Enfin, à notre avis, un Chapitre sur les fonctions thêtafuchsiennes, sur leurs singularités, sur la construction des fonctions automorphes en général, sur leur lien avec l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques et avec la représentation paramétrique des courbes algébriques, eût ouvert de larges horizons au lecteur : l'Ouvrage fût devenu plus suggestif et, si l'auteur était trop à l'étroit dans la collection Hœpli, il aurait dû profiter de l'édition française pour réaliser ce qu'il avoue dans sa Préface avoir désiré.

A. Boulanger,
Répétiteur à l'École Polytechnique.