NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. ZORETTI

Sur les moments d'une aire plane

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 547-551

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__547_1>

[X4c]

SUR LES MOMENTS D'UNE AIRE PLANE;

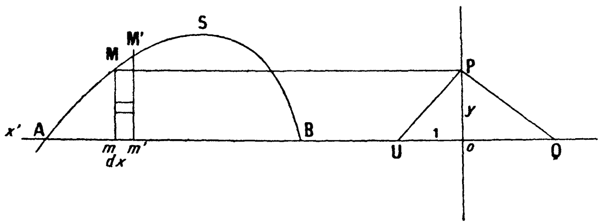
PAR M. L. ZORETTI.

Bien des procédés ont été indiqués pour calculer graphiquement le moment ou le moment d'inertie d'une aire plane par rapport à une droite. Je voudrais indiquer ci-dessous un procédé qui n'est peut-être pas nouveau mais dont je n'ai trouvé l'indication nulle part et qui, d'après les essais que j'en ai faits, me paraît assez simple.

Soit à calculer le moment d'inertie par rapport à $x'x$

de l'aire AB, dont nous supposerons d'abord le contour rencontré en un seul point par toute perpendiculaire

Fig. 1.



à $x'x$. Le moment d'inertie du petit rectangle $mm'M'M$ sera, la densité étant prise pour unité,

$$dx \int_0^y y^2\, dy = \tfrac{1}{3} y^3\, dx.$$

Et le moment d'inertie total sera

$$\Sigma\, \tfrac{1}{3} y^3\, dx.$$

Prenons tous les dx égaux; c'est-à-dire supposons l'aire subdivisée en petits rectangles de même base (très petite) dx. Dans la somme, $\frac{dx}{3}$ se met en facteur et l'on a pour le moment d'inertie

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{3}\, dx\, \Sigma y^3.$$

Il n'y a donc qu'à indiquer le calcul de Σy^3.

Soient deux droites rectangulaires; portons y en ordonnée sur l'une, soit $\mathrm{OP} = y$, et l'unité de longueur en abscisse sur l'autre, soit $\mathrm{OU} = 1$.

Menons PQ perpendiculaire à UP; on a

$$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OU}.\mathrm{OQ} = \mathrm{OQ}.$$

Donc

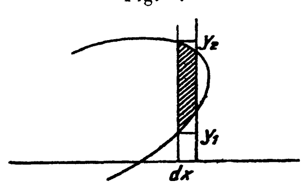
$$\mathrm{OQ} = y^2.$$

Quant à y^3, c'est le double de l'aire du triangle OPQ et elle se mesure au planimètre,

La disposition est bien simple : on place l'axe OU sur le prolongement de l'axe donné $x'x$. On porte toutes les longueurs $y = \mathrm{OP}$ au moyen de lignes de rappel parallèles à $x'x$. On construit ensuite toutes les droites PQ correspondantes. Ceci posé, pour l'emploi du planimètre, on partira du point O et l'on décrira successivement toutes les aires OPQ en conservant toujours le même sens de parcours (même si le contour de l'aire S était traversé par l'axe $x'x$). Le planimètre fera lui-même l'addition Σy^3. On multiplira le nombre trouvé pour l'aire par $\frac{dx}{6}$.

Il nous faut lever la restriction que le contour de l'aire est rencontré en un seul point par toute perpendiculaire à Ox. Supposons qu'il y ait deux points de

Fig. 2.



rencontre; le lecteur généralisera sans peine. Le moment d'inertie d'un rectangle tel que celui de la figure sera

$$\tfrac{1}{3}\, dx . y_2^3 - \tfrac{1}{3}\, dx . y_1^3 = \tfrac{1}{3}\, dx (y_2^3 - y_1^3).$$

Le moment d'inertie total sera

$$\frac{dx}{3}(\Sigma y_2^3 - \Sigma y_1^3).$$

La construction de y_1 et de y_1^2 étant faite de la même manière que celle de y_2 et de y_2^2, on voit que y_1^3 est l'aire doublée du triangle rectangle correspondant; pour la retrancher, il n'y a, lorsque l'index du planimètre sera revenu au point O, qu'à parcourir le contour de cette aire en sens inverse de celui choisi d'abord.

Remarques. — La méthode introduit le facteur $\frac{1}{6}$, le facteur dx et le facteur par lequel on doit multiplier l'indication brute en nombre de tours du planimètre pour avoir l'aire en centimètres carrés. Il peut y avoir avantage à introduire un autre facteur en prenant une longueur OU différente de l'unité de longueur. Si OU est multiplié par k, les mesures de OQ et de l'aire sont multipliées par $\frac{1}{k}$, et il faut les multiplier par k pour rendre à l'aire sa valeur. On pourra donc prendre pour OU une longueur quelconque, et multiplier le nombre fourni par la méthode précédente par la mesure de OU en centimètres.

On simplifie beaucoup en prenant $OU = \frac{1}{dx}$.

On peut encore simplifier le tracé des droites PQ de la façon suivante : quand le point P décrit OP, PQ reste tangente à une parabole de foyer U et de sommet O; la parabole étant supposée tracée, le tracé des droites PQ s'en déduit.

Il y a avantage à prendre OU assez grand, de l'ordre de grandeur des plus grandes longueurs OP par exemple, si l'on veut que les points Q soient bien déterminés, et en même temps que les longueurs OQ ne soient pas trop grandes. Alors, la portion de la parabole précédente qui est à utiliser est la portion comprise entre le sommet et le foyer. On peut donc la remplacer sans erreur sensible par le cercle osculateur au sommet, de rayon 2OU.

On pourrait modifier un peu la méthode en procédant comme dans le calcul d'une intégrale définie, c'est-à-dire en décomposant en trapèzes au lieu de rectangles; mais les calculs sont trop compliqués pour être pratiques.

Notons enfin que la méthode donne aussi le moment statique de l'aire par rapport à $x'x$. Le moment du rectangle MM'$m'm$ est en effet

$$dx \int_0^y y\,dy = \tfrac{1}{2}\,dx.y^2,$$

et le moment total est $\frac{1}{2}dx.\Sigma y^2$. On calcule Σy^2 en calculant la somme des longueurs OQ (au curvimètre). On obtient donc simultanément le centre de gravité et le rayon de gyration.