

CH. PLATRIER

**Une application de l'équation
fonctionnelle de Fredholm**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 508-513

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__508_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[H 11 c]

**UNE APPLICATION DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE
DE FREDHOLM;**

PAR M. CH. PLATRIER,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Le but de cette Note est la résolution de l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \frac{\partial^n \varphi(t)}{\partial t^n} dt = f(s),$$

lorsque le noyau $K(s, t)$ est astreint à la condition suivante : *La résolvante $K(s, t, \lambda)$ de l'équation fonction-*

nelle de Fredholm de noyau $K(s, t)$ admet comme dérivée $n^{\text{ième}}$, par rapport à s , la résolvante $K_n(s, t, \lambda)$ de l'équation fonctionnelle de Fredholm de noyau $\frac{\partial^n K(s, t)}{\partial s^n}$.

Nous nous proposons, en premier lieu, de traduire sous forme d'équation la condition ci-dessus. Rappelons tout d'abord les résultats suivants :

1° Le noyau et la résolvante d'une équation de Fredholm sont liés par les relations

$$(2) \quad -K(s, t) + K(s, t, \lambda) = \lambda \int_a^b K(s, z) K(z, t, \lambda) dz,$$

$$(3) \quad = \lambda \int_a^b K(z, t) K(s, z, \lambda) dz.$$

2° La solution de l'équation de Fredholm

$$(4) \quad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s),$$

est

$$(5) \quad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t, \lambda) f(t) dt,$$

quand λ n'est pas une constante caractéristique du noyau $K(s, t)$.

Dans la suite, nous nous contenterons du signe \int pour représenter \int_a^b , et nous supposerons que λ n'est pas une constante caractéristique du noyau $K(s, t)$.

Ceci posé, considérons l'équation (4) et l'équation (6)

$$(6) \quad \psi(s) - \lambda \int_a^b \frac{\partial^{n+p} K(s, t)}{\partial s^n \partial t^p} \psi(t) dt = g(s).$$

Soit $K_{n+p}(s, t, \lambda)$ sa résolvante ; cherchons à expri-

mer la condition, pour que

$$(7) \quad K_{n+p}(s, t, \lambda) = \frac{\partial^{n+p} K(s, t, \lambda)}{\partial s^n \partial t^p}.$$

En vertu de (2), on a, pour définir $K_{n+p}(s, t, \lambda)$,

$$(8) \quad \frac{\partial^{n+p} K(s, t)}{\partial s^n \partial t^p} + K_{n+p}(s, t, \lambda) = \lambda \int \frac{\partial^{n+p} K(s, z)}{\partial s^n \partial z^p} K_{n+p}(z, t, \lambda) dz,$$

et en dérivant (2) n fois par rapport à s et p fois par rapport à t , on obtient

$$(9) \quad \frac{\partial^{n+p} K(s, t)}{\partial s^n \partial t^p} + \frac{\partial^{n+p} K(s, t, \lambda)}{\partial s^n \partial t^p} = \lambda \int \frac{\partial^n K(s, z)}{\partial s^n} \frac{\partial^p K(z, t, \lambda)}{\partial t^p} dz.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que (7) soit remplie sera, en vertu de (8) et (9),

$$\int \left\{ \frac{\partial^n K(s, t)}{\partial s^n} \frac{\partial^p K(z, t, \lambda)}{\partial t^p} - \frac{\partial^{n+p} K(s, z)}{\partial s^n \partial z^p} \frac{\partial^{n+p} K(z, t, \lambda)}{\partial z^n \partial t^p} \right\} dz \equiv 0.$$

Elle peut s'écrire encore

$$(10) \quad \left[K(s, z) K(z, t, \lambda) - \frac{\partial^p K(s, z)}{\partial z^p} \frac{\partial^n K(z, t, \lambda)}{\partial z^n} \right] dz = A(s, t, \lambda),$$

avec

$$(11) \quad A(s, t, \lambda) = s^{n-1} \mu_1(t) + s^{n-2} \mu_2(t) + \dots + \mu_n(t) \\ + t^{p-1} \nu_1(s) + t^{p-2} \nu_2(s) + \dots + \nu_p(s),$$

les fonctions μ et ν étant des fonctions de λ .

Notons de suite que si l'on fait $\lambda = 0$ dans l'équation précédente, on a

$$(12) \quad \int \left\{ K(s, z) K(z, t) - \frac{\partial^p K(s, z)}{\partial z^p} \frac{\partial^n K(z, t)}{\partial z^n} \right\} dz = A(s, t, 0) = B(s, t),$$

$B(s, t)$ étant une fonction de forme analogue à $A(s, t, \lambda)$, mais où les fonctions μ et ν sont indépendantes de λ .

Je dis que, réciproquement, *toutes les fois que n ou p sera nul*, la condition (12) entraînera la condition (10).

Dérivons, en effet, n fois par rapport à s l'équation (2)

$$(13) \quad -\frac{\partial^n \mathbf{K}(s, t)}{\partial s^n} + \frac{\partial^n \mathbf{K}(s, t, \lambda)}{\partial s^n} = \lambda \int \frac{\partial^n \mathbf{K}(s, z)}{\partial s^n} \mathbf{K}(z, t, \lambda) dz.$$

Multiplions l'équation (2) par $\mathbf{K}(u, s) ds$, l'équation (13) par $\frac{\partial^p \mathbf{K}(u, s)}{\partial s^p} ds$, et intégrons la différence entre a et b ; on obtient

$$-B_1(u, t) + A_1(u, t, \lambda) = \lambda \int \mathbf{K}(z, t, \lambda) B_1(u, z) dz,$$

en désignant par $A_1(s, t, \lambda)$, $B_1(s, t)$ les premiers membres des équations (10) et (12).

En se servant de l'équation (3), on démontrerait une relation analogue, et finalement, avec un léger changement de notation, on a les égalités

$$(14) \quad -B_1(s, t) + A_1(s, t, \lambda) = \lambda \int \mathbf{K}(z, t, \lambda) B_1(s, z) dz,$$

$$(15) \quad = \lambda \int \mathbf{K}(s, z, \lambda) B_1(z, t) dz.$$

Ces égalités montrent que, *dans les cas respectifs soit de $p = 0$, soit de $n = 0$* , si $B_1(s, t)$ est de la forme $B(s, t)$, $A_1(s, t, \lambda)$ sera de la forme $A(s, t, \lambda)$, ce qui démontre la proposition réciproque que nous avons en vue.

On arrive ainsi à la proposition suivante : *Pour que la résolvante $\mathbf{K}(s, t, \lambda)$ de l'équation fonctionnelle de Fredholm de noyau $\mathbf{K}(s, t)$ ait comme dérivée $n^{\text{ième}}$ par rapport à s la résolvante $\mathbf{K}_n(s, t, \lambda)$ de l'équation fonctionnelle de Fredholm de noyau $\frac{\partial^n \mathbf{K}(s, t)}{\partial s^n}$, il faut et il*

suffit que

$$(16) \quad \int \mathbf{K}(s, z) \left[\mathbf{K}(z, t) - \frac{\partial^n \mathbf{K}(z, t)}{\partial z^n} \right] dz \\ = s^{n-1} \mu_1(t) + s^{n-2} \mu_2(t) + \dots + \mu_p(t),$$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ étant n fonctions arbitraires de t .

Ces résultats obtenus, revenons à notre problème primitif, la résolution de l'équation fonctionnelle (2).

En dérivant les deux membres de cette équation n fois par rapport à s , et en posant

$$\psi(s) = \frac{\partial^n \varphi(s)}{\partial s^n},$$

on obtient

$$(17) \quad \psi(s) - \lambda \int_a^b \frac{\partial^n \mathbf{K}(s, t)}{\partial s^n} \psi(t) dt = \frac{\partial^n f(s)}{\partial s^n}.$$

Cette équation est une équation de Fredholm de noyau $\frac{\partial^n \mathbf{K}(s, t)}{\partial s^n}$, dont la solution est

$$(18) \quad \psi(s) = \frac{\partial^n \varphi(s)}{\partial s^n} = \frac{\partial^n f(s)}{\partial s^n} + \lambda \int \mathbf{K}_n(s, t, \lambda) \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} dt.$$

On en déduit immédiatement

$$(19) \quad \varphi(s) = f(s) + \lambda \underbrace{\int_0^s ds \int_0^s ds \dots \int_0^s ds}_{n \text{ fois}} \mathbf{K}_n(s, t, \lambda) \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} dt \\ + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n,$$

a_1, a_2, \dots, a_n étant des constantes qu'on déterminerait en substituant dans (1) la valeur (19) de $\varphi(s)$.

Cette détermination, qui donne la solution de (1) dans le cas général, est pénible. Elle devient toutefois très simple quand $\mathbf{K}(s, t)$ satisfait à la condition (16).

Dans ce cas, en effet, (18) peut s'écrire

$$(20) \quad \frac{\partial^n \varphi(s)}{\partial s^n} = \frac{\partial^n f(s)}{\partial s^n} + \lambda \int \frac{\partial^n \mathbf{K}(s, t, \lambda)}{\partial s^n} \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} dt,$$

et (19) s'écrit alors

$$(21) \quad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int \mathbf{K}(s, t, \lambda) \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} dt \\ + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n,$$

a_1, a_2, \dots, a_n étant des constantes que nous nous proposons de déterminer.

Pour cela, remplaçons dans (1) $\varphi(s)$ par sa valeur (21); un léger changement de notation nous donne, en tenant compte de (16),

$$a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n \\ + \lambda \int \left\{ -\mathbf{K}(s, t) + \mathbf{K}(s, t, \lambda) - \lambda \int \mathbf{K}(s, z) \mathbf{K}(z, t, \lambda) dz \right\} \frac{\partial^n f(z)}{\partial z^n} dz \\ = \lambda^2 \int \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \times \mathbf{A}(s, t, \lambda) dt,$$

avec

$$\mathbf{A}(s, t, \lambda) = \mathbf{B}(s, t) + \lambda \int \mathbf{K}(z, t, \lambda) \mathbf{B}(s, z) dz$$

et

$$\mathbf{B}(s, t) = s^{n-1} \mu_1(t) + \dots + \mu_m(t)$$

Le terme entre accolades $\{ \}$ est nul en vertu de (2), et en identifiant, dans les deux membres, les coefficients des termes d'une même puissance de s , on obtient les égalités

$$(22) \quad a_k = \lambda^2 \int_a^b \left\{ \mu_k(t) + \lambda \int_a^b \mathbf{K}(z, t, \lambda) \mu_k(z) dz \right\} \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} dt,$$

avec

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Les égalités (16), (21) et (22) résolvent le problème que nous nous étions proposé.