NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. HAAG

Sur les coordonnées pentasphériques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 49-67

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__49_0>

[K[1]18g]

SUR LES COORDONNÉES PENTASPHÉRIQUES GÉNÉRALES;

PAR M. J. HAAG,
Chargé de cours à la Faculté des Sciences
de Clermont-Ferrand.

On sait qu'étant donné un système de cinq sphères deux à deux orthogonales, on peut lui faire correspondre un système de coordonnées, appelées *coordonnées pentasphériques*, dont l'introduction en Géométrie est due à M. Darboux. Mais on peut aussi définir des coordonnées pentasphériques en partant de cinq sphères quelconques ([1]); et, bien qu'on puisse les déduire des coordonnées orthogonales par une simple substitution linéaire, nous croyons cependant qu'il soit intéressant et utile d'en donner une exposition directe. C'est ce que nous allons essayer de faire ici.

1. Nous commencerons par donner quelques définitions qui faciliteront, dans la suite, l'énoncé de plusieurs propositions.

Considérons la fonction

$$S = k(x^2+y^2+z^2)+2ax+2by+2cz+d$$

des coordonnées rectangulaires x, y, z. Nous disons qu'elle définit un *feuillet sphérique* ([2]) de coordon-

([1]) *Voir* G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*, p. 270.

([2]) Cette dénomination correspond au feuillet plan de *Grassmann* (Blatt, ou *Plangrösse*).

nées (a, b, c, d, k) (¹), porté par la sphère dont l'équation est obtenue en annulant S. Le nombre k sera dit l'*indice* du feuillet. Un feuillet d'indice nul est donc porté par un plan et sera dit *feuillet plan*. Un *feuillet de l'infini* a pour coordonnées $a = b = c = k = 0$, $d \neq 0$. Il est porté par le plan de l'infini, et il équivaut, en somme, à un coefficient d, qui sera dit le *coefficient du feuillet*.

Étant donné un feuillet à distance finie, nous appellerons *point du feuillet* tout point M dont les coordonnées x, y, z annulent la fonction S correspondante.

Nous ne considérerons donc, comme points du feuillet, que des points à distance finie. Nous appellerons *vecteur normal* (²) du feuillet, relatif au point M, le vecteur (MN) dont les projections sur les axes sont

$$(1) \qquad a + kx, \qquad b + ky, \qquad c + kz.$$

Si k n'est pas nul, ce vecteur varie avec M, et si l'on appelle I le centre de la sphère qui porte le feuillet, ou *centre du feuillet*, on a l'égalité géométrique

$$(2) \qquad (MN) = k(IM).$$

On voit que (MN) est dirigé vers l'extérieur ou vers l'intérieur du feuillet, suivant que k est positif ou négatif. Il définit le côté positif du feuillet, ainsi qu'un sens de rotation dans le plan tangent en M (³).

Si $k = 0$, le vecteur (MN) demeure équipollent à lui-même quand M décrit le feuillet.

(¹) Ces coordonnées sont toujours supposées finies.

(²) C'est le *Normalenstrecke* de Grassmann, dans le cas du feuillet plan.

(³) Ceci est toutefois en défaut pour un feuillet de puissance nulle car (MN) est alors dans le plan tangent, suivant la droite isotrope double de ce plan.

Dans tous les cas, des expressions (1) on déduit

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - kd. \tag{3}$$

Cette quantité, qui va jouer un rôle fondamental, sera appelée la *puissance du feuillet*. Un feuillet de puissance nulle et d'indice non nul sera dit *feuillet-point;* il est porté par une sphère de rayon nul. Un feuillet plan de puissance nulle et situé à distance finie sera un *feuillet isotrope;* il est porté par un plan isotrope. Bien que nous n'ayons pas défini le vecteur normal pour un feuillet de l'infini, nous conviendrons de regarder encore, dans ce cas, l'expression (3) comme représentant la puissance du feuillet, laquelle est donc nulle ([1]).

Supposons deux feuillets (S) et (S′) possédant au moins un point commun M à distance finie. Nous appellerons *puissance commune des deux feuillets, ou puissance de* (S) *par rapport à* (S′), [ou de (S′) par rapport à (S)], le produit scalaire des vecteurs normaux (MN), (MN′) des deux feuillets, c'est-à-dire

---

([1]) On démontrera sans peine les propositions suivantes:

Si un feuillet (S) varie de façon que son centre I tende vers une position limite I_0, située à distance finie, et que son indice tende vers zéro, ou, ce qui revient au même, que son rayon augmente indéfiniment, sa limite est un feuillet de l'infini. Il en est de même si I s'éloigne indéfiniment dans une direction non isotrope, le rayon de (S) prenant d'ailleurs une suite de valeurs quelconques.

Si I s'éloigne indéfiniment dans une direction isotrope (α, β, γ), et si le rayon reste fini, le feuillet (S) a pour limite un feuillet dont les coordonnées sont:

$$a = -\lambda\alpha, \qquad b = -\lambda\beta, \qquad c = -\lambda\gamma, \qquad d, \qquad k = 0,$$

en désignant par λ la limite du rapport $\dfrac{\theta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, où ($\xi$, η, ζ, θ) sont les coordonnées homogènes du point I. Comme cette limite est indéterminée, il en est de même de celle du feuillet.

la quantité

$$p(S, S') = MN.MN'.\cos(MN, MN') \quad (^1).$$

On établit aisément la formule

$$(4) \qquad p(S, S') = aa' + bb' + cc' - \frac{kd' + k'd}{2}.$$

Dans le cas où les deux feuillets n'ont pas de point commun à distance finie, cette dernière expression servira de définition à leur puissance commune.

Il est clair que la puissance d'un feuillet par rapport à lui-même n'est autre que la puissance de ce feuillet.

Enfin, si deux feuillets ont un point commun M à distance finie, nous appellerons *angle des deux feuillets* l'angle des vecteurs normaux correspondants. Le cosinus de cet angle est entièrement déterminé et il est donné par la formule

$$(5) \quad \cos(S, S') = \frac{p(S, S')}{MN.MN'} = \frac{aa' + bb' + cc' - \dfrac{kd' + k'd}{2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - kd}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 - k'd'}},$$

les radicaux devant être pris avec leurs valeurs arithmétiques, quand ils sont réels (2).

On vérifiera sans peine les propriétés suivantes :

Si les feuillets (S) et (S') ont des indices non nuls, on a, en appelant I et I' les centres et R et R' les rayons des sphères qui les portent,

$$(6) \qquad \overline{II'}^2 - R^2 - R'^2 = -2\frac{p(S, S')}{kk'}.$$

(1) Cette définition du produit scalaire est illusoire quand l'un des vecteurs est isotrope; il vaut mieux prendre comme expression de cette quantité la somme $XX' + YY' + ZZ'$, où X, Y, Z, et X', Y', Z' sont les composantes des deux vecteurs suivant trois axes rectangulaires.

(2) Il est indéterminé pour deux feuillets de puissances et de puissance commune nulles.

Le premier membre de cette égalité a été désigné par M. Darboux sous le nom de *puissance commune des deux sphères*. Il a, comme on voit, l'inconvénient de devenir infini dès que l'un des feuillets devient plan.

Si (S) est à indice non nul et si (S′) est un feuillet plan à distance finie, le quotient $\frac{p(S, S')}{k}$ est égal au produit scalaire des vecteurs (IM′) et (M′N′), en désignant par M′ un point quelconque de (S′). En particulier, si (S′) n'est pas isotrope, on peut prendre pour M′ la projection de I sur (S′), et l'on a

$$\frac{p(S, S')}{k} = \overline{IM'}.\overline{M'N'}. \tag{7}$$

Si (S) et (S′) sont tous deux des feuillets plans à distance finie, leur puissance commune est égale au produit scalaire des vecteurs normaux (MN) et (M′N′) relatifs à deux points quelconques des feuillets.

Si (S′) est à l'infini, on a simplement

$$p(S, S') = -\frac{d'}{2}k. \tag{8}$$

2. Ces préliminaires étant exposés, choisissons cinq feuillets déterminés linéairement indépendants (c'est-à-dire dont les coordonnées de même nom ne sont pas liées par une relation linéaire et homogène), que nous appellerons les *feuillets fondamentaux*. Le feuillet S_i, par exemple, sera défini par la fonction

$$S_i \equiv k_i(x^2 + y^2 + z^2) + 2a_i x + 2b_i y + 2c_i z + d_i.$$

Il est clair que tout feuillet (S) peut être défini par la fonction

$$S \equiv \sum_{i=1}^{5} y_i S_i,$$

où y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 sont des nombres algébriques déterminés. Ces nombres seront appelés les *coordonnées pentasphériques*, ou simplement les coordonnées, du feuillet (S), que nous nommerons aussi le feuillet (y). Le feuillet (S_i) a évidemment toutes ses coordonnées nulles, sauf y_i, qui est égal à un.

Si l'on applique la formule (3), on voit que la puissance du feuillet (y) s'exprime par une forme quadratique, de discriminant non nul [1], des coordonnées y_i; nous la désignerons par la notation $\Omega\,(y)$. Quant à l'indice k, il devient une forme linéaire

$$F(y) = \sum_{i=1}^{5} k_i y_i$$

qui ne peut être identiquement nulle, si l'on veut que les feuillets fondamentaux soient linéairement indépendants. Les formes $\Omega(y)$ et $F(y)$ seront appelées respectivement *la forme quadratique* et *la forme linéaire fondamentales.*

D'après cela, l'équation

$$\Omega(y) = 0 \tag{9}$$

caractérise les feuillets de puissance nulle; l'équation

$$F(y) = 0 \tag{10}$$

caractérise les feuillets plans; ces deux équations simultanées caractérisent les feuillets isotropes. Un feuillet de l'infini a des coordonnées déterminées à un facteur près, qui est, par exemple, le coefficient du feuillet (n° 1); ces coordonnées doivent satisfaire à (9) et à (10).

---

[1] Si les feuillets (S_i) sont réels, cette forme quadratique est une somme de quatre carrés positifs et d'un carré négatif, en vertu de la loi d'inertie.

Si l'on se reporte à la formule (4), et si l'on se rappelle les propriétés d'invariance de la forme polaire d'une forme quadratique, on voit que *la puissance commune des deux feuillets* (y) *et* (y') *est égale à la forme polaire* $\Omega(y\,|\,y') \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} y'_i \frac{\partial\Omega}{\partial y_i}$.

D'après la formule (5), l'angle des deux feuillets est donné par

$$\cos(y, y') = \frac{\Omega(y\,|\,y')}{\sqrt{\Omega(y)}\sqrt{\Omega(y')}}. \tag{11}$$

La condition d'orthogonalité est donc

$$\Omega(y\,|\,y') = 0.$$

On déduit de ce qui précède une interprétation très simple des coefficients de $\Omega(y)$. Si l'on pose

$$\Omega(y) \equiv \sum\sum A_{ij} y_i y_j,$$

le coefficient A_{ij} est égal à la puissance commune des feuillets fondamentaux (S_i) et (S_j).

3. Nous appellerons *coordonnées adjointes* du feuillet (y) les cinq quantités

$$x_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial y_i}.$$

Avec ces nouvelles variables, la forme quadratique $\Omega(y)$ se transforme en son adjointe $\omega(x)$, et la forme linéaire $F(y)$ devient une nouvelle forme linéaire $f(x)$. La puissance du feuillet (y), ou feuillet (x), s'écrit alors

$$p(y) = \Omega(y) = \omega(x) = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i.$$

La puissance commune des feuillets (y) et (y') s'écrit de même

$$p(y, y') = \Omega(y/y') = \omega(x/x') = \sum_{i=1}^{5} x_i y'_i = \sum_{i=1}^{5} x'_i y_i.$$

Il y a lieu d'introduire maintenant les feuillets (s_i) dont toutes les coordonnées adjointes sont nulles, sauf x_i, qui est égal à un. Ces feuillets seront les *feuillets adjoints fondamentaux*. Le feuillet (s_i) est entièrement défini par les conditions d'être orthogonal à (S_j), pour $j \neq i$, et d'avoir l'unité pour puissance par rapport à (S_i).

Si l'on pose

$$\omega(x) \equiv \sum\sum a_{ij} x_i x_j,$$

le coefficient a_{ij} est égal à la puissance commune de (s_i) et de (s_j) [1].

Grâce à l'introduction des feuillets adjoints fondamentaux, il est facile d'avoir la signification géométrique des coordonnées d'un feuillet quelconque. Remarquons, en effet, qu'on a

$$p(S, s_i) = \sum_{i=1}^{5} x'_i y_i = y_i.$$

De même

$$p(S, S_i) = \sum_{i=1}^{5} y'_i x_i = x_i.$$

Donc, *les coordonnées y_i et x_i d'un feuillet sont respectivement égales aux puissances de ce feuillet par rapport à s_i et à S_i.*

---

(1) On sait d'ailleurs que $a_{ij} = \frac{A'_{ij}}{\Delta}$, en appelant Δ le discriminant de $\Omega(y)$ et A'_{ij} le mineur relatif à A_{ij} dans ce discriminant.

4. Considérons un feuillet-point, de centre M. Si l'on fait varier son indice, ses cinq coordonnées varient proportionnellement; nous pouvons donc les considérer comme des *coordonnées homogènes du point* M. A tout point M correspondent donc un système de coordonnées homogènes y_i, qui sont proportionnelles à ce qu'on peut appeler les puissances du point par rapport aux feuillets (s_i), et un système de coordonnées homogènes x_i, qui sont proportionnelles aux puissances de M par rapport aux feuillets (S_i).

Ces coordonnées doivent vérifier respectivement l'équation (9) et l'équation

$$\omega(x) = 0. \tag{12}$$

Si l'on applique la formule (6) aux deux points M et M', on a

$$\overline{MM'}^2 = -2\frac{\Omega(y\,|\,y')}{F(y)F(y')} = \frac{\Omega(y'-y)}{F(y)F(y')} = \frac{\omega(x'-x)}{f(x)f(x')},$$

en vertu de la formule de Taylor et des équations (9) et (12). En particulier, si les deux points sont infiniment voisins, on a l'élément linéaire de l'espace

$$ds^2 = \frac{\Omega(dy)}{[F(y)]^2} = \frac{\omega(dx)}{[f(x)]^2}.$$

Les feuillets orthogonaux en M à la droite MM' ont pour coordonnées $\lambda y_i + \mu dy_i$, λ et μ désignant deux paramètres variables. De là résulte que la condition d'orthogonalité des deux droites MM' et MM'', où M'' désigne un autre point voisin $(y + \delta y)$, est

$$\Omega(dy\,|\,\delta y) = 0,$$

ou bien

$$\omega(dx\,|\,\delta x) = 0.$$

Une surface quelconque est représentée par une équation homogène

$$G(y) = 0. \tag{13}$$

En particulier, la sphère qui porte le feuillet (x') a pour équation

$$\sum x'_i y_i = 0,$$

c'est-à-dire l'équation linéaire la plus générale. Les sphères tangentes en un point M de la surface (13) ont pour coordonnées adjointes

$$x'_i = \frac{\partial G}{\partial y_i} + \lambda x_i,$$

λ désignant une constante arbitraire et x_i les coordonnées adjointes de M. On aura, en particulier, le λ du plan tangent en écrivant que $f(x')$ est nul. On voit aussi que la condition d'orthogonalité de la surface (14) et d'une autre surface passant par le même point, s'écrit

$$\omega\left(\frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G'}{\partial y}\right) = 0,$$

si $G'(y) = 0$ désigne l'équation de la seconde surface.

Il est facile, enfin, d'établir les formules relatives à l'inversion. Soit un feuillet (Y) porté par la sphère d'inversion Σ (qui peut se réduire à un plan). Nous voulons les coordonnées y'_i du point M' inverse de M (y_i). Ce point appartient au faisceau (M, Σ); il a donc des coordonnées de la forme $y_i + \lambda Y_i$; de plus, on doit avoir $\Omega(y + \lambda Y) = 0$, ou, en tenant compte de ce que $\Omega(y)$ est nul,

$$\lambda = -\frac{2\,\Omega(y/Y)}{\Omega(Y)}.$$

En particulier, si (y) est le feuillet fondamental (S_i), les coordonnées de M' sont

$$y'_j = y_j \qquad (j \neq i), \qquad\qquad y'_i = y_i - \frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y_i}}{A_{ii}}.$$

Toutes les formules qui précèdent ont leurs analogues relativement aux coordonnées adjointes. On pourrait encore en établir beaucoup d'autres, mais nous nous en tiendrons là au point de vue des généralités, et nous allons maintenant examiner quelques systèmes particuliers.

5. Cherchons d'abord un système pour lequel les feuillets adjoints (s_i) coïncident avec les feuillets (S_i). Il faut et suffit, pour cela, que (S_i) soit orthogonal aux quatre autres feuillets fondamentaux et ait pour puissance 1 (n° 3). Nous retombons sur le système des coordonnées orthogonales, étudié en détail par M. Darboux.

Les deux formes $\Omega(y)$ et $\omega(x)$ s'écrivent alors

$$\Omega(y) = \sum_{i=1}^{5} y_i^2, \qquad \omega(x) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2.$$

Les coordonnées adjointes d'un feuillet sont égales aux coordonnées y, et il n'y a plus lieu de les distinguer.

Le vecteur normal de (S_i) ayant pour longueur 1, son indice k_i est, en vertu de (2), égal à $\frac{1}{R_i}$, R_i désignant le rayon de la sphère correspondante, précédé du signe + ou du signe — suivant que le côté positif du feuillet est le côté extérieur ou le côté intérieur de la sphère (si l'on a un feuillet plan, $\frac{1}{R_i}$ est nul). Par suite, les coordonnées pentasphériques d'un point M sont proportionnelles aux quotients $\frac{S_i}{R_i}$, où S_i désigne la puissance du point par rapport à la sphère (S_i), ce quotient devant être remplacé, quand le feuillet est plan, par $2l_i$, l_i désignant la distance du point M au plan, précédée du signe + ou — suivant que M est du côté positif ou négatif de (S_i). Il suffit, pour se rendre compte de tout cela, de se reporter aux formules (6) et (7).

Si nous ajoutons que la forme $F(y)$ est ici $\sum_{i=1}^{5} \frac{y_i}{R_i}$, nous en aurons dit suffisamment pour que l'on puisse déduire sans difficulté, de notre théorie générale, toutes les propriétés bien connues des coordonnées de M. Darboux.

6. Considérons maintenant le système suivant : les feuillets (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) sont des feuillets-points, d'indices égaux à l'unité. Les points correspondants A_1, A_2, A_3, A_4 forment nécessairement un tétraèdre, et nous les supposerons tous à distance finie. Quant au feuillet (S_5), nous le supposons à l'infini, son coefficient étant -2 (n° 1). Au moyen de ces données et d'une remarque faite à la fin du n° 2, nous pouvons écrire immédiatement $\Omega(y)$. Si α_{ij} désigne le carré de la distance $A_i A_j$, nous avons, en vertu de la formule (6),

$$A_{ij} = -\frac{\alpha_{ij}}{2} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4);$$

puis, en vertu de (8),

$$A_{i5} = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \qquad\qquad A_{55} = 0.$$

Le discriminant s'écrit

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\alpha_{12}}{2} & -\frac{\alpha_{13}}{2} & -\frac{\alpha_{14}}{2} & 1 \\ -\frac{\alpha_{21}}{2} & 0 & -\frac{\alpha_{23}}{2} & -\frac{\alpha_{24}}{2} & 1 \\ -\frac{\alpha_{31}}{2} & -\frac{\alpha_{32}}{2} & 0 & -\frac{\alpha_{34}}{2} & 1 \\ -\frac{\alpha_{41}}{2} & -\frac{\alpha_{42}}{2} & -\frac{\alpha_{43}}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\Delta'}{8},$$

en posant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 1 & \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 1 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ 1 & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

Cherchons les feuillets adjoints. Le feuillet (s_1) doit être orthogonal à (S_2), (S_3), (S_4), (S_5); il est donc porté par le plan A_2, A_3, A_4, que nous appellerons (Π_1). De plus, sa puissance par rapport à (S_1) doit être égale à 1 (n° 3). Donc, en vertu de la formule (7), son vecteur normal doit être dirigé vers l'extérieur du tétraèdre, et il doit avoir pour longueur $\frac{1}{h_1}$, en appelant h_1 la hauteur issue de A_1. On définit de même (s_2), (s_3), (s_4). Quant à (s_5), il est porté par la sphère circonscrite, que nous appellerons (Σ). Sa puissance par rapport à (S_5) devant être égale à 1, son indice est aussi égal à 1, d'après (8).

Nous aurons immédiatement des formules intéressantes en calculant les coefficients de $\omega(x)$. Tout d'abord, le coefficient a_{11} est égal à $\frac{1}{h_1^2}$; on a donc

$$\frac{4\Delta}{h_1^2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 1 & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ 1 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(\alpha_{43}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{32}^2 - 2\alpha_{24}\alpha_{23} - 2\alpha_{32}\alpha_{34} - 2\alpha_{42}\alpha_{43}),$$

ou encore

$$h_1^2 = \frac{-\Delta'}{2\alpha'_{11}},$$

en désignant par α'_{ij} le mineur de Δ' relatif à α_{ij}. On aura les trois autres hauteurs par des formules analogues.

Si nous désignons maintenant par φ_{ij} l'angle dièdre formé par les faces opposées à A_i et à A_j, nous avons par exemple (n° 1)

$$a_{12} = -\frac{\cos\varphi_{12}}{h_1 h_2} = -\frac{2\alpha'_{12}}{\Delta'};$$

d'où

$$\cos\varphi_{12} = \frac{2h_1 h_2 \alpha'_{12}}{\Delta'} = \frac{\alpha'_{12}}{\sqrt{\alpha'_{11}\alpha'_{22}}};$$

puis,

$$\sin^2\varphi_{12} = \frac{\alpha'_{11}\alpha'_{22} - (\alpha'_{12})^2}{\alpha'_{11}\alpha'_{22}} = \frac{\Delta'}{\alpha'_{11}\alpha'_{22}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_{34} \\ 1 & \alpha_{43} & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\alpha_{34}\Delta'}{\alpha'_{11}\alpha'_{22}},$$

d'après un théorème de Jacobi sur les déterminants [1]. Si l'on remarque que l'aire σ_1 de la face $A_2 A_3 A_4$ est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_{34}}\,\frac{h_2}{\sin\varphi_{12}}$, on en déduit aisément la formule

$$\sigma_1 = \frac{1}{4}\sqrt{-\alpha'_{11}},$$

[1] *Voir*, par exemple, *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française, t. I_2, n° 23).

d'où résulte la suivante

$$\Delta' = 8 \times 36 V^2,$$

en appelant V le volume du tétraèdre.

L'indice de (s_5) étant égal à un, le vecteur normal en M est équipollent au rayon (IM) (n° 1). Soit donc R le rayon de (Σ). On a $R^2 = a_{55}$; d'où

$$R^2 = -\frac{\beta_0}{2\Delta'},$$

en appelant β_i le mineur de Δ' relatif à l'élément de la première ligne et de la $(i+1)^{\text{ième}}$ colonne. De même, si ψ_1 désigne l'angle de (Σ) avec le plan (Π_1), on a $a_{15} = \frac{R}{h_1} \cos \psi_1$; d'où

$$\cos\psi_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_0 \alpha'_{11}}},$$

d'où

$$\sin\psi_1 = \sqrt{\frac{2\Delta' \alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{42}}{\beta_0 \alpha'_{11}}}.$$

Par suite, le rayon R_1 du cercle $A_2\, A_3\, A_4$ est donné par

$$R_1 = R \sin\psi_1 = \frac{\sqrt{\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{42}}}{\sqrt{-\alpha'_{11}}} = \frac{\sqrt{\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{42}}}{4\sigma_1},$$

ce qui donne une formule élémentaire bien connue.

Introduisons maintenant un feuillet-point (M) d'indice 1. Si l'on appelle α_{i5} le carré de la distance A_iM, les coordonnées adjointes du feuillet considéré sont $-\frac{\alpha_{15}}{2}, -\frac{\alpha_{25}}{2}, -\frac{\alpha_{35}}{2}, -\frac{\alpha_{45}}{2}$, 1. Si l'on porte ces valeurs dans (12), on obtient la formule connue

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ 1 & \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ 1 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ 1 & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 & \alpha_{45} \\ 1 & \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Quant aux coordonnées y_i, les quatre premières sont les *coordonnées barycentriques du point* M; par exemple, $y_1 = \frac{v_1}{V}$, v_1 désignant le volume $MA_2A_3A_4$, compté positivement ou négativement suivant que M et A_1 sont du même côté de (Π_1) ou de côtés différents. La cinquième coordonnée y_5 est la puissance du point M par rapport à la sphère (Σ). En tenant compte de (9), on voit que cette puissance est donnée en fonction des coordonnées barycentriques par la formule

$$y_5 = \frac{1}{4}\Sigma\alpha_{ij}y_iy_j \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

On en déduit, en particulier, l'équation de (Σ) en coordonnées barycentriques.

Il serait facile de multiplier les applications du système particulier que nous venons d'étudier. On pourrait, par exemple, interpréter les coordonnées d'un feuillet plan ou d'un feuillet sphérique quelconque. C'est ce que nous laisserons au lecteur le soin de faire ([1]).

7. Nous indiquerons rapidement, pour terminer, un dernier système.

Prenons pour (S_5) un feuillet quelconque de puissance égale à 1, porté par une sphère véritable (Σ). Soit $ABA'B'$ un quadrilatère isotrope tracé sur cette sphère. Appelons α et β les distances AB et $A'B'$. Prenons pour (S_1) et (S_2) les feuillets-points de centres respectifs A et A' et d'indices respectifs $\frac{2}{\alpha}$ et $-\frac{2}{\alpha}$. Prenons de même pour (S_3) et (S_4) les feuillets-points de centres B et B' et d'indices $\frac{2}{\beta}$ et $-\frac{2}{\beta}$.

([1]) Les diverses formules que nous venons d'établir sont d'ailleurs à peu près toutes connues.

Nous avons alors

$$\Omega(y) = y_5^2 + 2y_1y_2 + 2y_3y_4;$$

d'où

$$\omega(x) = x_5^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4.$$

Les feuillets adjoints (s_1), (s_2), (s_3), (s_4), (s_5) coïncident respectivement avec (S_2), (S_1), (S_4), (S_3), (S_5).

Ce système se prête, d'une façon particulièrement simple, à l'étude de la cyclide de Dupin qui admet les points A, A′, B, B′ pour points doubles. Deux sphères (σ) et (σ') passant respectivement par les points A, A′ et B, B′ ont des coordonnées de la forme

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = \eta_3, \qquad y_4 = \eta_4, \qquad y_5 = \eta_5$$

et

$$y_1 = \eta'_1, \qquad y_2 = \eta'_2, \qquad y_3 = 0, \qquad y_4 = 0, \qquad y_5 = \eta'_5.$$

Pour qu'elles soient tangentes, il faut et suffit que l'on ait, en vertu de l'équation (12),

$$\eta_5^2\eta_5'^2 = (\eta_5^2 + 2\eta_3\eta_4)(\eta_5'^2 + 2\eta'_1\eta'_2).$$

Par suite, si (σ') reste fixe, les coordonnées de (σ) doivent vérifier une relation de la forme

$$\eta_5^2 = 2m\eta_3\eta_4,$$

m désignant une certaine constante. La sphère (σ) ayant pour équation en coordonnées adjointes

$$\eta_3x_3 + \eta_4x_4 + \eta_5x_5 = 0,$$

son enveloppe a pour équation

$$x_5^2 = \frac{2}{m}x_3x_4. \tag{14}$$

Telle est l'équation de la cyclide de Dupin dans le système actuel. Elle s'écrit aussi, en vertu de (12),

$$x_5^2 = \frac{2}{n} x_1 x_2, \tag{15}$$

avec la condition

$$m + n + 1 = 0. \tag{16}$$

Sous cette seconde forme, elle apparaît comme l'enveloppe des sphères (σ'), dont les coordonnées sont liées par

$$\eta_5'^2 = 2n\eta_3'\eta_4'.$$

L'angle φ, sous lequel (σ) coupe (Σ), est donné par

$$\cos^2\varphi = \frac{\eta_5^2}{\eta_5^2 + 2\eta_3\eta_4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m}};$$

il est donc constant, et l'on a

$$m = \cot^2\varphi.$$

De même, les sphères (σ') coupent (Σ) sous un angle constant ψ, et cet angle est lié au premier par la relation (16), qui s'écrit (¹)

$$\cos\varphi\cos\psi = 1.$$

Nous terminerons cette étude rapide en remarquant que les équations (14) et (15) donnent le théorème suivant :

Étant donnés une sphère (Σ) *et deux points* A *et* A' *de cette sphère, le lieu des points* M, *dont la puissance par rapport à* (Σ) *est proportionnelle au produit* MA. MA' *est une cyclide de Dupin admet-*

(¹) On trouvera toutes ces propriétés dans une Note placée à la fin de la seconde édition des *Systèmes triples orthogonaux* de M. Darboux.

tant pour points doubles A *et* A′, *ainsi que les deux points de contact* B *et* B′ *des plans tangents à* (Σ) *menés par* AA′. *La puissance de* M *par rapport à* (Σ) *est aussi proportionnelle au produit* MB. MB′, *lequel est donc proportionnel à* MA. MA′.

Si la sphère (Σ) *est un plan, on a un énoncé analogue, dans lequel la puissance par rapport à* (Σ) *doit être remplacée par la distance à ce plan. La cyclide possède alors trois plans de symétrie.*