NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. VALIRON

Sur la dérivée logarithmique de certaines fonctions entières

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 498-508

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__498_1>

[D4a]

SUR LA DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE DE CERTAINES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. G. VALIRON.

Les fonctions entières que je considère ici sont des fonctions d'ordre nul, satisfaisant à une condition de croissance. Soit $\rho(x)$ *un exposant net de la suite des zéros*, c'est-à-dire une fonction non croissante, telle que $\rho(x)\log x$ croît (ou ne décroît pas) : et qu'on ait

$$n \leqq r_n^{\rho(r_n)},$$

r_n désignant le module du n^e zéro, l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de l'indice n, que j'appellerai *indices principaux* [1].

Je supposerai que la fonction

$$[\rho(x)]^2 \log x,$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

1. Dans ces conditions, soit

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_1^\infty \frac{1}{z - a_n}$$

la dérivée logarithmique considérée. Je vais démontrer la proposition suivante :

Il existe une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants, sur lesquels on a l'égalité

$$g(z) = \frac{n}{z}(1 + \varepsilon), \tag{1}$$

n étant le nombre des zéros intérieurs au cercle considéré, et ε une quantité complexe tendant vers zéro avec $\frac{1}{z}$.

Soient, en effet, un indice principal N, r_N le module du zéro correspondant; nous poserons pour simplifier

$$R = r_N,$$
$$R' = R e^{\frac{1}{\rho(R)\sqrt{\log R}}};$$

(1) L'existence des fonctions $\rho(x)$ est démontrée dans mon Mémoire : *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Matematische Annalen*, B. LXX, p. 471).

le nombre m des zéros compris entre les cercles de rayons R et R′ est

$$m = N' - N,$$

N′ étant le nombre des zéros de module inférieur à R′. Or on a

$$N' \leqq R'^{\rho(R')} \leqq R'^{\rho(R)} = R^{\rho(R)} e^{\frac{1}{\sqrt{\log R}}},$$

d'où

$$m \leqq R^{\rho(R)} e^{\frac{1}{\sqrt{\log R}}} - R^{\rho(R)} = R^{\rho(R)} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\log R}} \qquad \left(\lim_{R=\infty} \varepsilon = 0\right).$$

Appliquons maintenant entre les cercles de rayons R et R′ le procédé d'exclusion de M. Boutroux ([1]), on pourra trouver des cercles de rayon r compris entre R et R′, tels que $r = \frac{R'}{k}$ (k fini) et tels que si i est le nombre défini par les inégalités

$$r_i < r < r_{i+1},$$

on ait

$$\left.\begin{array}{l} r_{i+p} - r > \dfrac{R'}{k'm}(p-1) \\ r - r_{i-p} > \dfrac{R'}{k'm}\, p \end{array}\right\} \quad k' \text{ fini} \quad \left\{\begin{array}{l} (i+p \leqq N'), \\ (i-p \geqq N). \end{array}\right.$$

Il résulte de là que nous aurons

$$\left|\sum_{N}^{N'} \frac{1}{z - a_n}\right| < \sum_{N}^{N'} \frac{1}{|r - r_n|} < \frac{k'm}{R'} \sum \frac{1}{p};$$

le dernier Σ est étendu, d'une part, de 1 à $N' - i$, d'autre part de 1 à $i - N$; donc

$$\sum \frac{1}{p} < 2 \sum_{1}^{\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{p} < 2 \log m$$

([1]) *Voir* mon article *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Nouvelles Annales*).

$\left[\left(\frac{m}{2}\right)\right.$ désigne la partie entière de $\left.\frac{m}{2}\right]$, et par suite :

$$\left|\sum_{N}^{N'} \frac{1}{z - a_n}\right| < \frac{2k' m \log m}{R'} < \frac{2k' R^{\rho(R)} \rho(R) \log R(1+\varepsilon)}{R' \sqrt{\log R}},$$

et encore, comme

$$\rho(R)\sqrt{\log R}$$

tend vers zéro,

$$\left|\sum_{N}^{N'} \frac{1}{z - a_n}\right| < \frac{\varepsilon R^{\rho(R)}}{R'} \qquad \left(\lim_{R=\infty} \varepsilon = 0\right).$$

Considérons maintenant les autres termes de $g(z)$. Pour $n > N'$, on a

$$r = \frac{R'}{k} < \frac{r_n}{k},$$

donc

$$r_n - r > \left(1 - \frac{1}{k}\right) r_n$$

et

$$\left|\sum_{N'+1}^{\infty} \frac{1}{z - a_n}\right| < \sum_{N'+1}^{\infty} \frac{1}{r_n - r} < \frac{k}{k-1} \sum_{N'+1}^{\infty} \frac{1}{r_n}.$$

Posons $M = R'^{\rho(R')}$; pour $n > M$, nous aurons comme $\rho(r_n) < \rho(R')$,

$$n < r_n^{\rho(r_n)} < r_n^{\rho(R')},$$

d'où

$$\frac{1}{r_n} < \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho(R')}}},$$

et par suite

$$\sum_{N'+1}^{\infty} \frac{1}{r_n} < \frac{M - N'}{R'} + \sum_{M+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho(R')}}}$$

$$< \frac{M - N'}{R'} + \int_{M}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{\rho(R')}}} = \frac{M - N'}{R'} + \frac{\rho(R') M}{[1 - \rho(R')] R'}.$$

Comme on a, d'une part,

$$M = R'^{\rho(R')} \leqq R'^{\rho(R)} \leqq R^{\rho(R)} e^{\frac{1}{\sqrt{\log R}}}$$

et, d'autre part,

$$N' > N = R^{\rho(R)},$$

on voit que l'on obtiendra encore ici

$$\left| \sum_{N'+1}^{\infty} \frac{1}{z - a_n} \right| < \frac{\varepsilon R^{\rho(R)}}{R'} \qquad \left(\lim_{R=\infty} \varepsilon = 0 \right).$$

En tenant compte de l'inégalité précédemment obtenue, nous avons

$$\left| \sum_{N}^{\infty} \frac{1}{z - a_n} \right| < \frac{\varepsilon R^{\rho(R)}}{R'} \quad (^1).$$

Il reste à considérer l'expression

$$\sum_{1}^{N} \frac{1}{z - a_n},$$

comme $\frac{R}{r}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{R}$, nous aurons pour les termes de cette somme

$$\frac{1}{z - a_n} = \frac{1 + \varepsilon_n}{z},$$

ε_n étant une quantité complexe, inférieure en valeur absolue à un nombre arbitrairement petit; il résulte de là l'égalité

$$\sum_{1}^{N} \frac{1}{z - a_n} = \frac{(1 + \varepsilon) N}{z}.$$

---

(1) Dans tout ce qui suit, ε désigne une quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{R}$ ou $\frac{1}{N}$.

ε étant une quantité complexe tendant vers zéro avec $\frac{1}{Z}$, et finalement

$$g(z) = \frac{(1+\varepsilon)N}{z}.$$

De plus, en remarquant que le nombre des zéros contenus dans le cercle r est compris entre N et $N' = N(1+\varepsilon')$, on voit que la proposition énoncée est établie.

2. Il résulte de la proposition précédente que, sur les cercles considérés, la fonction $g(z)$ est comparable à la dérivée logarithmique d'un polynome de degré n, dont les racines auraient un module très petit par rapport à celui de z. L'analogie se poursuit en ce que, *à l'intérieur d'un tel cercle la fonction $f'(z)$ a $n-1$ racines.* En effet comme

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g(z) = \frac{(1+\varepsilon)n}{z},$$

la variation de

$$\log f'(z) - \log f(z) = \log g(z),$$

lorsque z décrit le cercle, est égale à celle de $-\log z$, c'est-à-dire à $-2\pi i$, ce qui démontre la proposition.

On voit que, si les cercles pour lesquels la proposition a lieu sont suffisamment rapprochés, *le rapport des nombres des racines de $f(z)$ et $f'(z)$, contenus dans un cercle de rayon r, tend vers* 1 *lorsque r croît indéfiniment.* C'est ce qui a lieu, en particulier, lorsque le *rapport de deux indices principaux successifs tend vers* 1.

Il existe d'ailleurs des fonctions pour lesquelles le rapport des nombres des zéros de la fonction et de sa dérivée n'a pas pour limite 1 ; cela a lieu notamment lorsque, n_a désignant le nombre des zéros de $f(z)+a$ contenus dans le cercle de rayon r, $\frac{n_a}{n_b}$ n'a pas pour limite 1 lorsque r croît indéfiniment ([1]), car n' étant le nombre des zéros de $f'(z)$ dans le même cercle, l'un au moins des rapports $\frac{n'}{n_a}$, $\frac{n'}{n_b}$ ne tendra pas vers 1.

3. En nous plaçant toujours dans le cas où $\rho(x)$ vérifie la condition de croissance indiquée, nous allons, en faisant une hypothèse sur la distribution des zéros, préciser la région du plan où l'égalité (1) est vérifiée. Nous supposerons qu'on a

$$n + h_n = r_n^{\rho(r_n)} \qquad (0 < h_n < \mathrm{H} < 1). \tag{2}$$

Posons

$$r_i \leqq r = |z| \leqq r_{i+1},$$
$$\mathrm{R}e^{\frac{1}{\varepsilon(\mathrm{R})}} = r \qquad (\mathrm{R}' = 2r);$$

$\varepsilon(x)$ étant une fonction tendant vers zéro et qui sera déterminée ultérieurement, de telle façon que le nombre N des zéros de module inférieur à R tende vers i lorsque R croît indéfiniment. En désignant encore par N' le nombre des zéros contenus dans le cercle de rayon R', les calculs faits précédemment donnent

$$\sum_1^{\mathrm{N}} \frac{1}{z - a_n} = \frac{(1+\varepsilon)\mathrm{N}}{z},$$
$$\left| \sum_{\mathrm{N}'+1}^{\infty} \frac{1}{z - a_n} \right| < \frac{\varepsilon' \mathrm{R}^{\rho(\mathrm{R})}}{\mathrm{R}'}.$$

([1]) Pour l'existence de telles fonctions, *voir* mon article sur *Le théorème de M. Picard pour les fonctions entières d'ordre nul* (*Nouvelles Annales*, 1911, p. 145). Les cercles, pour lesquels $n_a = n_b$, sont aussi ceux pour lesquels $n' = n_a - 1$ (il s'agit ici des cercles considérés dans les démonstrations du théorème de M. Wiman et du théorème du paragraphe 1).

Considérons la somme restante

$$\left|\sum_{N+1}^{N}\frac{1}{z-a_n}\right|<\sum_{N+1}^{N'}\frac{1}{|z-a_n|},$$

n étant compris entre N et N', nous avons

$$r_{n+1}\geqq(n+1)^{\frac{1}{\rho(r_{n+1})}}\geqq(n+1)^{\frac{1}{\rho(r_n)}},$$

$$r_n\leqq(n+H)^{\frac{1}{\rho(r_n)}},$$

d'où

$$r_{n+1}\geqq r_n\left(1+\frac{1-H}{n+H}\right)^{\frac{1}{\rho(r_n)}}>r_n\left[1+\frac{1-H}{(n+H)\rho(r_n)}\right],$$

et comme

$$n+H<N',\qquad \rho(r_n)<\rho(R);$$

$$r_{n+1}>r_n\left[1+\frac{1-H}{N'\rho(R)}\right],$$

c'est-à-dire finalement

$$r_{n+1}-r_n>\frac{r_n(1-H)}{N'\rho(R)}>\frac{R(1-H)}{N'\rho(R)}.$$

On aura par suite

$$\sum_{i+2}^{N'}\frac{1}{|z-a_n|}<\frac{N'\rho(R)}{R(1-H)}\log(N'-i)$$

et

$$\sum_{N}^{i-1}\frac{1}{|z-a_n|}<\frac{N'\rho(R)}{R(1-H)}\log(i-N).$$

Finalement

$$\left|\sum_{N+1}^{N'}\frac{1}{z-a_n}\right|<\left|\frac{1}{z-a_i}\right|+\left|\frac{1}{z-a_{i+1}}\right|+\frac{2N'\rho(R)\log N'}{R(1-H)};$$

comme de plus

$$N'<R'^{\rho(R')}\leqq(2r)^{\rho(R)}<(1+\varepsilon)R^{\rho(R)}e^{\frac{\rho(R)}{\varepsilon(R)}},$$

le dernier terme du second membre est inférieur à

$$\frac{2(1+\varepsilon)R^{\rho(R)}\left[\log R + \frac{1}{\varepsilon(R)}\right][\rho(R)]^2}{(1-H)R},$$

ou encore à

$$\frac{R^{\rho(R)}}{r}\frac{2(1+\varepsilon)}{1-H}\left\{[\rho(R)]^2\log R\left[1+\frac{1}{\varepsilon(R)\log R}\right]e^{\frac{1}{\varepsilon(R)}}\right\};$$

en prenant

$$\frac{1}{\varepsilon(R)} = \log\frac{1}{\rho(R)\sqrt{\log R}},$$

la quantité entre crochets tend vers zéro, et comme $\frac{\rho(R)}{\varepsilon(R)}$ tend vers zéro la condition $\lim \frac{N'}{N} = 1$ est bien remplie. Nous aurons d'après ce qui précède, en supposant que le point z est extérieur aux cercles de centres a_i et a_{i+1} et de rayon $\frac{r_{i+1}-r_i}{k}$, $k > 1$,

$$\left|\frac{1}{z-a_i}\right| + \left|\frac{1}{z-a_{i+1}}\right| < \frac{\varepsilon i}{r}.$$

En résumé on aura bien l'égalité

$$g(z) = \frac{(1+\varepsilon)n}{z}, \tag{1}$$

valable à l'extérieur d'un cercle de rayon R_0 *et de cercles ayant pour centres les zéros* a_n *et pour rayons* $\frac{r_{n+1}-r_n}{k} = r_n\frac{k_1}{n\rho(r_n)}$.

Les conclusions relatives à la dérivée prendront alors la forme remarquable suivante : *Il y a dans le cercle* R_0 *un nombre de zéros de* $f'(z)$ *égal à celui de* $f(z)$ *diminué d'une unité, les autres racines de la dérivée se trouvent dans les cercles ayant pour centres les* zéros a_n *de* $f(z)$ *et pour rayon* $\frac{k_1 r_n}{n\rho(r_n)}$.

Autrement, si b_n est le zéro d'ordre n de la dérivée, on a

$$b_{n-1} = a_n\left[1 + \frac{k'}{n\rho(r_n)}\right],$$

k' étant un nombre complexe fini.

On peut également de l'égalité (1) tirer une expression asymptotique de $\log f(z)$; on aura, en effet,

$$\log f(z) = (1+\varepsilon)\int_{z_0}^{z}\frac{n\,dz}{z},$$

le chemin d'intégration ne coupant pas les cercles d'exclusion. Par suite, en formant ce chemin d'arcs de cercles et de droites passant par l'origine, on aura

$$\mathcal{R}[\log f(z)] = (1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r}\frac{n\,dx}{x}.$$

Comme, d'autre part, sur un cercle $[z] = r$, on a

$$\int_{z}^{z'}\frac{n\,dz}{z} = n\log\frac{z'}{z},$$

nous obtiendrons, en posant

$$z = re^{i\varphi},$$

$$\log f(z) = (1+\varepsilon_1)\int_{r_0}^{r}\frac{n\,dx}{x} + i(1+\varepsilon_2)(\varphi+\varphi_0) \quad (^1).$$

4. Les résultats obtenus s'étendent immédiatement aux fonctions méromorphes

$$G(z) = \sum_{1}^{\infty}\frac{A_n}{z-a_n} \qquad (C < A_n < D);$$

(1) Un calcul direct donnerait

$$f(z) = \left(\frac{z^n}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^{1+\varepsilon}$$

C et D étant de même signe, et a_n étant le $n^{\text{ième}}$ zéro d'une fonction d'ordre nul $f(z)$, dont l'exposant net satisfait aux conditions précédentes.

On aura ici

$$G(z) = \frac{(1+\varepsilon)\Sigma A_n}{z},$$

sur une infinité de cercles dans le cas général, et dans tout le plan à l'exclusion de cercles de centres a_n dans le cas où l'on a l'égalité (2). Si l'on pose

$$G(z) = \frac{f_1(z)}{f(z)},$$

on voit que $f_1(z)$ a un zéro de moins que $f(z)$ dans une infinité de cercles et, dans le cas particulier de l'égalité (2), le zéro c_n de $f_1(z)$ est donné par l'égalité

$$c_n = a_{n+1}\left[1 + \frac{k'}{n\rho(r_n)}\right].$$