Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 462-471

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__462_0>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Problèmes.* — I. *Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *trouver les courbes telles que la sous-tangente soit égale à* $2y - \frac{x^2}{2y}$, x *et* y *désignant les coordonnées du point de contact.*

II. 1. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et la surface* (Σ) *dont l'équation est*

$$x^2(x^2+y^2+z^2)-a^2y^2=0;$$

indiquer la forme des sections de (Σ) *par des plans parallèles aux plans de coordonnées.*

2. *Construire en particulier l'intersection* (Γ) *de* (Σ) *et du plan* xOy, *calculer l'aire de la région du plan limitée par* (Γ) *et l'une de ses asymptotes.*

3. *Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par* (Σ) *et par le cylindre*

$$x^2+y^2-ay=0.$$

Question de cours. — *Mouvement d'un point matériel sur une courbe plane fixe sous l'action d'une force située dans le plan de la courbe; projections du mouvement sur les axes; équations intrinsèques (projections sur la normale et la tangente).*

Application au pendule simple (donner seulement les équations du mouvement).

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *On considère la courbe* (Γ) *qui, rapportée à deux axes rectangulaires, a pour équation*

$$(\Gamma)\; x^3-a(x^2-3y^2)=0.$$

Soit (C) *le cercle de courbure au point* A $(x=a, y=0)$.

Soit (C′) *le cercle qui a pour équation*

$$27(x^2+y^2)-41ax+14a^2=0.$$

Tracer le contour ABCD *situé au-dessus de* Ox *et limité par un arc de la courbe* (Γ), *un arc du cercle* (C′) *l'axe des* x *et un arc du cercle* (C).

Calculer l'aire de la portion du plan limitée par ce contour et le périmètre de ce contour.

II. *Moment d'inertie d'un solide homogène limité par deux cylindres de rayons* R *et* r' *de même axe et de hauteur commune* h :

1° *Par rapport à l'axe de révolution;*

2° *Par rapport à une génératrice du petit cylindre;*

3° *Par rapport à une génératrice du grand cylindre.*

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Problèmes.* — I. 1. *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *trouver une courbe telle que l'ordonnée à l'origine de la tangente en un point* M *soit égale à* $\dfrac{y^2}{2\sqrt{ax}}$; x *et* y *désignent les coordonnées du point* M, a *représente une longueur donnée.*

2. *L'une de ces courbes a pour équation*

$$xy^2=a(x+y)^2;$$

construire cette courbe.

3. *Calculer l'aire du trapèze curviligne limité par un arc de la courbe précédente, les parallèles à* Oy *menées par l'extrémité de cet arc et l'axe* Ox.

II. Ox, Oy, Oz *étant trois axes de coordonnées rectangulaires et* a *une longueur donnée, calculer l'aire de la portion de la surface*

$$2az=x^2+y^2$$

qui se projette orthogonalement sur xOy *à l'intérieur de la courbe*

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

Question de cours. — *Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe. Pendule composé.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. 1° *Résoudre l'équation*

$$f(x) = x^6 - 8x^5 + 25x^4 - 38x^3 + 28x^2 - 8x = 0,$$

sachant que les racines sont commensurables;

2° *Décomposer en fractions simples la fraction*

$$\frac{f'(x)}{f(x)};$$

3° *Tracer la courbe* $y = \mathrm{F}(x)$ *quand* x *varie de* $+2$ *à* $+\infty$.

Calculer l'aire limitée par cette courbe, l'axe des x *et les droites* $x = 3$, $x = 4$.

II. *Par rapport à un système d'axes fixes* OX, OY *et à certain instant, un système* ωx, ωy *est défini de la façon suivante : les coordonnées de* ω *sont* 1, 2 *et l'angle* $(\omega x, \mathrm{OX}) = 30°$, *le point* ω *est animé d'une translation parallèle à* OX *de grandeur* 3 *et les axes* ωx, ωy *ont une vitesse angulaire de rotation autour de* ω *égale à* 2. *Le point situé sur* ωx *et d'abscisse* $+1$ *est le centre d'une rotation de vitesse angulaire* 1. *Trouver le centre instantané du mouvement résultant.*

(Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Question de cours.* — *Étudier les différents points d'un corps solide dans un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.*

Donner leur expression analytique en supposant que l'axe de rotation passe par l'origine et que le vecteur rotation a pour projections p, q, r.

Problèmes. — I. *Construire la courbe plane* (C) *représentée dans un système de coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x^2(x^2 + y^2) + 4ax^2y - 2a^2x^2 + 3a^2y^2 - 4a^3y + a^4 = 0,$$

où a *désigne une longueur donnée; trouver le lieu du* *milieu des cordes de* (C) *parallèles à l'axe des ordonnées. Calculer l'aire de la région du plan limitée par* (C).

II. *Dans un plan rapporté à un pôle* O *et à un axe polaire* Ox, *construire la courbe* (Γ) *représentée par l'équation*

$$\rho = 4a\cos\omega - \frac{a}{\cos\omega},$$

où ω *et* ρ *ont leur signification ordinaire*, *a représentant une longueur donnée.*

Montrer qu'il existe sur Ox *un point* I *tel que la droite* IM *qui le joint à un point quelconque* M *de* (Γ) *fasse avec* Ox *un angle triple de l'angle* (Ox, OM).

Trouver les trajectoires orthogonales des courbes (Γ) *quand a varie.*

La courbe (Γ) *présente une boucle*, *calculer l'aire de la portion de la sphère de centre* O *et de rayon* 3*a qui se projette à l'intérieur de cette boucle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *On donne deux axes rectangulaires et les courbes*

$$(A) \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{4x - x^2},$$

$$(B) \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 2}.$$

Construire la portion OP *de* (A) *pour* $0 \leqq x \leqq 1$ *et la portion* PQ *de* (B) *pour* $1 \leqq x \leqq 2$, *trouver les tangentes de ces courbes au point commun*, *calculer les rayons de courbure. Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par l'arc* OP *en tournant autour de* Ox *et l'aire plane limitée par l'arc* PQ, *l'axe des* x *et les parallèles à* Oy *menées par* P *et* Q.

II. *Deux points pesants se meuvent sur une droite verticale*, *le premier passe en* O *au temps* $t = 0$ *avec une vitesse* v_1, *le deuxième passe en* O *au temps* θ *avec une vitesse* v_2.

On demande l'instant où les deux mobiles se rencontrent, *leur position et leurs vitesses à cet instant; discuter les signes de ces quantités* (*on supposera* $\theta > 0$).

Déterminer θ *de façon que la rencontre n'ait pas lieu et trouver dans ce cas la distance des deux mobiles.*

(Juillet 1911.)

Lyon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Vérifier que la courbe représentée, en coordonnées rectangulaires planes, par les équations*

$$(1) \qquad x = (1+t)e^t, \qquad y = t^2 e^t$$

satisfait à l'équation différentielle

$$(2) \qquad x\,dy^2 - y\,dx\,dy - y\,dx^2 = 0.$$

2° *Soient* M *un point de la courbe considérée,* T *le point où la tangente en* M *rencontre l'axe* Ox, P *la projection de* M *sur* Ox, *et* K *la projection de* P *sur* MT. *Montrer qu'il résulte de l'équation* (2) *que la longueur* TK *est égale à la distance de l'origine* O *à la tangente* MT.

3° *Intégrer l'équation différentielle* (2).

II. 1° *Connaissant le mouvement absolu d'un point libre* M, *et celui d'un système* Z *de forme invariable, en déduire la vitesse relative de* M *par rapport à* Z ;

2° *Déduire du principe des vitesses virtuelles les conditions d'équilibre d'un corps solide libre soumis à des forces données.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnée la série*

$$f(x) = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \ldots$$

1° *Dire quel est son intervalle de convergence ;*

2° *Pour* $x = \frac{1}{2}$, *calculer la somme d'un nombre suffisant de termes, de manière à obtenir* $f\left(\frac{1}{2}\right)$ *à moins de* 0,001;

3° *Trouver, sous forme finie, l'expression de* $f'(x)$; *en déduire celle de* $f(x)$, 4° *Le service de l'expression obtenue pour contrôler la valeur précédemment trouvée par* $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — I. *On donne un système d'axes rectangulaires* $Oxyz$, *dont l'axe* Oz *est vertical, et la surface* S *représentée par les équations*

$$x\ v, \qquad y = mv \sin u, \qquad z = a \cos u,$$

où a, m *sont des constantes données et* u, v *des paramètres variables.*

1° *Montrer que la surface* S *est engendrée par une droite horizontale mobile qui s'appuie sur une droite et un cercle fixes;* 2° *On imagine un point* M *qui se déplace sur la surface* S, *de manière qu'on ait*

$$u = t, \qquad v = f(t);$$

et l'on demande de déterminer la fonction $f(n)$ *de manière que l'accélération de* M *soit constamment tangente en* M *à la surface* S; 3° *Calculer le volume compris à l'intérieur de la surface* S *et entre les deux plans* $x = a$, $x = 2a$.

II. *Étudier, au point de vue cinématique, le mouvemen le plus général d'un corps solide.*

III. *Un point matériel pesant, partant du repos, est astreint à rester sur une droite inclinée d'un angle* α *sur l'horizon, le long de laquelle il peut glisser sans frottement. On demande quel doit être cet angle* α *pour que la projection sur l'horizontale du chemin parcouru dans un temps donné soit maxima.*

Épreuve pratique. — *Démontrer que l'équation*

$$x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0$$

a deux racines réelles et deux seulement; et calculer ces racines à 0,01 *près.*

Nota. *On pourra employer des méthodes graphiques, en se servant de papier quadrillé au millimètre. On remar-*

quera que la dérivée de l'équation donnée a une racine rationnelle. (Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Construire la courbe* C *définie par les équations*

$$x = te^t, \qquad y = (t+1)e^t.$$

II. *Vérifier que les coordonnées* (x, y) *d'un point de cette courbe satisfont à l'équation différentielle*

$$x\,dy + y\,dx = 2y\,dx. \tag{1}$$

III. *Soient* M *un point de la courbe considérée*, S *le point où la normale en* M *rencontre* OX, P *la projection de* M *sur* OX, *montrer qu'il résulte de* (1) *que*

$$\mathrm{OS} = 2\,\mathrm{PM}.$$

IV. *Intégrer l'équation différentielle*

$$(x^2 - 4y^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + y^2\,dy^2 = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1. *Volume compris entre le plan* $x = 0$, *le plan* $z = 0$, *le cylindre* $y^2 + x = 1$, *et le paraboloïde* $z = x^2 + y^2$.

2. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près la plus grande racine de l'équation* $x \log_{10} x + \frac{1}{10} = 0$. (Juillet 1911.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Construire la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x^4 y - x^2 + y = 0.$$

Trouver la position des points d'inflexion.

Calculer le rayon de courbure en chaque point où y *est maximum ou minimum.*

Signification et calcul de l'intégrale définie

$$\int_{-h}^{+h} \frac{x^2\,dx}{1 + x^4}.$$

Cette intégrale a pour valeur limite

$$\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin\dfrac{3\pi}{4}}$$

quand h augmente indéfiniment.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une balle est lancée au point* A *avec une vitesse initiale de* 20 m : s *sous un angle de* 41° *avec l'horizon.*

La balle vient frapper le plan horizontal du point de départ en B; *elle rebondit et décrit une nouvelle parabole avec une nouvelle vitesse initiale et un nouvel angle de départ. Elle frappe de nouveau le sol en* C *et ainsi de suite.*

On admet que chaque fois que la balle rebondit sur le sol, la composante horizontale de la vitesse au départ est égale à la composante horizontale à l'arrivée au sol, mais que la composante verticale de la vitesse au départ n'est que les $\frac{2}{3}$ *de la composante verticale à l'arrivée au sol.*

On assimile la balle à un point et l'on néglige naturellement la résistance de l'air.

On demande de calculer :

1° *La distance du point de départ initial à la position limite de la balle ;*

2° *La durée totale de ce trajet ;*

3° *Le nombre minimum de ricochets que peut faire la balle convenablement lancée pour atteindre une portée de* 100^m^ *et l'angle de départ sous lequel on doit la lancer pour qu'elle atteigne effectivement cette portée dans ce nombre minimum de bonds.* (Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Déterminer les droites et les variétés de coniques qu'on peut placer sur la surface dont l'équation est*

$$xy = 2z.$$

2° *On considère l'équation différentielle*

$$\frac{dx^2}{dt^2} + n^2 x = n^2 \lambda \sin qt,$$

où x représente l'abscisse d'un point mobile sur une droite, t le temps et n, λ et q des constantes positives.

Intégrer cette équation de sorte que la partie de l'intégrale qui provient de l'équation privée de son second membre soit nulle ainsi que sa dérivée pour $t = 0$.

Discuter la nature du mouvement défini par l'intégrale obtenue suivant les valeurs du rapport $\frac{q^2}{n^2}$.

Examiner le cas où l'on a $q^2 = n^2$.

Indiquer des problèmes de dynamique régis par l'équation différentielle.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Les racines de l'équation*

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - 1 = 0$$

sont séparées par les nombres

$$-1, +0, +1, +\infty.$$

Calculer, à 0,001 *près, la racine comprise entre* 0 *et* 1.

2° *Un plan horizontal monte d'un mouvement uniformément accéléré avec une accélération de* $3^{m},5$ *par seconde dirigée suivant la verticale.*

Un poids de 60^{kg} *est placé sur ce plan.*

Calculer la pression entre le poids et le plan.

Faire le même calcul dans le cas de la descente du plan.

SOLUTION.

1° *Portée totale :*

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}\,\frac{1}{1-\lambda} = 121^{m},$$

$$\lambda = \frac{2}{3}, \qquad v_0 = 20, \qquad \alpha_0 = 41^{0};$$

2° *Durée du trajet :*

$$\frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}\,\frac{1}{1-\lambda} = 8^{s},03;$$

3° On a

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}\,\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} \text{ pour } n \text{ bonds.}$$

Donc

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} = 100,$$

d'où

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{100\,g(1-\lambda)}{v_0^2(1-\lambda^n)};$$

donc

$$100\,g(1-\lambda) < v_0^2(1-\lambda^n),$$

d'où

$$\lambda^n < 1 - \frac{100\,g(1-\lambda}{v_0^2}.$$

De là

$$n > \frac{\log 12 - \log 2,20}{\log 3 - \log 2} \text{ ou } n > 4,1841.$$

Donc

$$n = 5.$$

On trouve ensuite $2\alpha_0 = 70°8'$ ou $\alpha_0 = 35°4'$.

(Octobre 1910.)