NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BOUVAIST

Sur les triangles inscrits et circonscrits à une cartésienne

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 408-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__408_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[M¹6g]

SUR LES TRIANGLES INSCRITS ET CIRCONSCRITS A UNE CARTÉSIENNE;

PAR M. R. BOUVAIST,
Enseigne de vaisseau.

L'équation générale d'une cartésienne en coordonnées trilinéaires normales est

$$[(ayz+bxz+cxy)-(ax+by+cz)(ux+vy+wz)]^2$$
$$-(ax+by+cz)^3(\alpha x+\beta y+\gamma z)=0,$$

le cercle

$$(ayz+bxz+cxy)-(ax+by+cz)(ux+vy+wz)=0$$

ayant pour centre le foyer singulier de la courbe, et la droite

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

étant l'unique bitangente de celle-ci.

La courbe considérée passera par les sommets du triangle de référence. Si l'on a

$$\alpha=\frac{u^2}{a},\qquad \beta=\frac{v^2}{b},\qquad \gamma=\frac{w^2}{c}.$$

Elle sera tangente aux côtés du triangle si l'équation

$$b^2[2acv+(bw-cv)^2]y^2$$
$$+bcyz[2(bw-cv)^2+2a(bw+cv)-a^2]$$
$$+c^2[2abw+(bw-cv)^2]z^2=0,$$

et les deux autres équations obtenues en permutant circulairement, a, b, c, u, v, w sont carrés parfaits.

Ces trois conditions équivalent aux suivantes :

$$bw + cv = \frac{a}{4},$$

$$cu + aw = \frac{b}{4},$$

$$av + bu = \frac{c}{4},$$

qui admettent pour solutions

$$u = \frac{\cos A}{4}, \qquad v = \frac{\cos B}{4}, \qquad w = \frac{\cos C}{4},$$

et l'équation de l'unique cartésienne circonscrite au triangle de référence est

$$\begin{aligned}
&[4(ayz + bxz + cxy) \\
&\quad - (x\cos A + y\cos B + z\cos C)(ax + by + cz)]^2 \\
&\quad - (ax + by + cz)^3 \left[x\frac{\cos^2 A}{a} + y\frac{\cos^2 B}{b} + z\frac{\cos^2 C}{c}\right] = 0.
\end{aligned}$$

1° *Points de contact de la courbe avec les côtés du triangle.*

Les droites joignant les sommets aux points de contact situés sur les côtés opposés sont

$$(1)\quad \begin{cases} by(a + 2c\cos B) - cz(a + 2b\cos C) = 0, \\ cz(b + 2a\cos C) - ax(b + 2c\cos A) = 0, \\ ax(c + 2b\cos A) - by(c + 2a\cos B) = 0; \end{cases}$$

la première de ces droites passe visiblement par le point

$$\left[0,\ \left(\frac{a}{2} + b\cos C\right)\sin C,\ \left(\frac{a}{2} + c\cos B\right)\sin B\right],$$

milieu du segment compris entre le milieu du côté BC et le pied de la hauteur perpendiculaire à ce côté.

Donc : *La cartésienne considérée touche les côtés* *du triangle* ABC *aux pieds des perpendiculaires abaissées sur les côtés du centre du cercle des neuf points.*

Remarque. — Les droites (1) ne peuvent être concourantes que si le triangle considéré est isoscèle.

2° *Tangentes à la cartésienne aux sommets du triangle donné.*

Soit $y - \lambda z = 0$ la tangente à la courbe au point A; pour déterminer λ il suffit de former l'équation des droites joignant le point B, aux points d'intersection de cette droite avec la courbe et d'écrire que cette équation est divisible par z^2.

Il vient

$$c(c + 2b\cos A)^2\lambda + b(b + 2c\cos A)^2 = 0,$$

la tangente est par conséquent

$$\frac{y}{b}(c + 2b\cos A)^2 + \frac{z}{c}(b + 2c\cos A)^2 = 0.$$

La droite joignant les points de contact de la courbe avec les côtés CA et AB a pour équation

$$-ax + by\frac{c + 2a\cos B}{c + 2b\cos A} + cz\frac{b + 2a\cos C}{b + 2c\cos A} = 0,$$

la parallèle à cette droite menée par A a pour équation

$$y(b + 2c\cos A) + z(c + 2b\cos A) = 0,$$

le faisceau formé par cette droite et sa conjuguée par rapport à CA, AB est

$$y^2(b + 2c\cos A)^2 - z^2(c + 2b\cos A)^2 = 0;$$

le faisceau inverse

$$z^2(b + 2c\cos A)^2 - y^2(c + 2b\cos A)^2 = 0,$$

et la polaire du point à l'infini sur BC $\left(0, \frac{1}{b}, -\frac{1}{c}\right)$ est la tangente à la cartésienne en A.

Donc : *La tangente en* A *à la cartésienne est la médiane issue de* A *du triangle formé par* BC *et le faisceau inverse du faisceau formé par la parallèle à la droite joignant les points de contact de la courbe avec* CA *et* AB *et la conjuguée de celle-ci par rapport à* CA *et* AB.

3° *Foyer singulier de la cartésienne.* — On sait que, comme l'a démontré M. Humbert, les diamètres des cartésiennes sont perpendiculaires à leurs cordes correspondantes et passent par le foyer singulier. Dans le cas actuel, le foyer de la cartésienne sera par suite le point de concours des perpendiculaires élevées aux côtés du triangle, au milieu des segments compris entre le milieu de chaque côté et son point de contact avec la courbe. C'est visiblement le milieu du segment compris entre le centre O du cercle ABC et le centre O_1, du cercle des neuf points. Le foyer singulier est d'ailleurs le centre du cercle

$$\begin{aligned}&4(ayz + bxz + cxy)\\&\quad - (x\cos A + y\cos B + z\cos C)(ax + by + cz) = 0;\end{aligned}$$

on vérifie facilement que c'est le point indiqué.

Le cercle précédent passe par les points d'intersection de la courbe avec la bitangente. La droite $x\cos A + y\cos B + z\cos C = 0$ étant l'axe orthique du triangle (axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points), on voit que le cercle considéré fait partie du faisceau déterminé par ces deux derniers.

Donc : *Le foyer singulier de la cartésienne est le milieu du segment compris entre les centres des* *cercles circonscrits et des neuf points et le cercle ayant pour centre ce point et passant par les contacts de la courbe avec la bitangente fait partie du faisceau déterminé par ces deux cercles.*

4° *Bitangente de la cartésienne.* — La bitangente est la droite

$$\frac{x \cos^2 A}{a} + \frac{y \cos^2 B}{b} + \frac{z \cos^2 C}{c} = 0.$$

C'est la droite coupant les côtés du triangle, au milieu des segments compris sur chacun d'eux entre le pied de la hauteur perpendiculaire au côté considéré et l'intersection de ce côté avec l'axe orthique. C'est par suite, si l'on désigne par H_1, H_2, H_3 les pieds des hauteurs, le lieu des centres des coniques inscrites au triangle $H_1 H_2 H_3$ et tangentes à l'axe orthique, ou encore le lieu des centres des coniques conjuguées au triangle ABC et tangentes à l'axe orthique. Parmi ces dernières il y a deux hyperboles équilatères dont les centres sont les points d'intersection du cercle ABC avec la bitangente; ces hyperboles équilatères étant inscrites au triangle $H_1 H_2 H_3$, leurs centres sont sur le cercle conjugué au triangle $H_1 H_2 H_3$, la bitangente est par suite l'axe radical du cercle ABC et du cercle conjugué au triangle $H_1 H_2 H_3$.

Remarque. — L'équation de la bitangente peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{x \cos^2 A}{a} + \frac{y \cos^2 B}{b} + \frac{z \cos^2 C}{c}\\ &\quad = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{1}{2R}(ax + by + cz) = 0;\end{aligned}$$

elle est donc parallèle à la droite joignant les points d'intersection des côtés avec les tangentes aux sommets opposés au cercle ABC.

5° *Point d'intersection de la cartésienne avec le cercle circonscrit au triangle donné.* — Les points d'intersection situés à distance finie, du cercle circonscrit et de la courbe sont sur la parabole

$$(x \cos A + y \cos B + z \cos C)^2$$
$$-(ax + by + cz)\left(x \frac{\cos^2 A}{a} + y \frac{\cos^2 B}{b} + z \frac{\cos^2 C}{c}\right) = 0,$$

parabole dont l'axe est parallèle à l'axe orthique du triangle ABC; pour obtenir le quatrième point D l'intersection de la courbe, il suffit donc de mener par A une droite AD, faisant avec l'axe orthique le même angle que BC et de prendre son intersection D avec le cercle ABC.

Remarque. — La parabole considérée touche la bitangente de la cartésienne, et ses quatre autres points d'intersection avec cette dernière sont sur le cercle des neuf points du triangle ABC.

Si l'on prend pour origine le foyer singulier de la cartésienne et pour axe des x l'axe de la courbe, l'équation de celle-ci devient

$$(x^2 + y^2 - R^2)^2 - k^3(x - a) = 0.$$

On voit que la cartésienne est le lieu des points tels que le rapport du carré de leur puissance par rapport à un cercle fixe à leur distance à une droite fixe est constant.

Nous allons calculer, pour la cartésienne inscrite et circonscrite au triangle ABC, les trois paramètres de grandeur ρ^2, k^3, d.

1° *Calcul de* ρ^2. — Nous avons vu plus haut que le cercle Γ passant par les points d'intersection de la courbe avec la bitangente et ayant pour centre le foyer singulier F (milieu du segment compris entre le centre O du cercle circonscrit et le centre O_1 du cercle des neuf points) appartenait au faisceau formé par le cercle circonscrit et le cercle des neuf points. Nous aurons par conséquent, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit,

$$\rho^2 + \overline{OF}^2 = \frac{5R^2}{8};$$

d'autre part

$$3R^2 = 3\overline{OG}^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

(G étant le centre de gravité de ABC) et

$$3OG = 4OF = OH$$

(H étant l'orthocentre de ABC), d'où

$$3R^2 = \frac{16\overline{OF}^2}{3} + \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

d'où enfin

$$16\rho^2 = R^2 + a^2 + b^2 + c^2.$$

2° *Calcul de* k^3. — k^3 est égal au rapport changé de signe du carré de la puissance π du sommet A par rapport au cercle Γ, à la distance de A à la bitangente

$$\frac{x\cos^2 A}{a}+\frac{y\cos^2 B}{b}+\frac{z\cos^2 C}{c}=0.$$

L'équation du cercle Γ s'obtient en ajoutant membre à membre les équations des cercles O et O_1 ; il en résulte que la puissance π est la demi-somme des puissances de A par rapport aux cercles O et O_1 ou la demi-puissance de A par rapport à O_1, c'est-à-dire

$$\pi=\frac{bc\cos A}{4}.$$

La distance de A à la bitangente est

$$\delta_A=\frac{h_A\cos^2 A}{a\sqrt{P}},$$

h_A étant la hauteur de ABC issue de A et P étant égale à

$$\frac{\cos^4 A}{a^2}+\frac{\cos^4 B}{b^2}+\frac{\cos^4 C}{c^2} - \frac{2\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}{abc}\left[\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}\right],$$

d'où

$$K^3=-\frac{b^2c^2\cos^2 A}{16}\times\frac{a\sqrt{P}}{h\cos^2 A} = -\frac{a^2b^2c^2\sqrt{P}}{32S}=-\frac{Rabc\sqrt{P}}{8};$$

reste à calculer $\sqrt{P}$.

$$P=\frac{\cos^4 A}{a^2}+\frac{\cos^4 B}{b^2}+\frac{\cos^4 C}{c^2} - \frac{2\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}{abc}\left(\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}\right);$$

or

$$\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{abc}{4 R^2 \cos A \cos B \cos C},$$

d'où

$$P = \frac{\cos^4 A}{a^2} + \frac{\cos^4 B}{b^2} + \frac{\cos^4 C}{c^2} - \frac{\cos A \cos B \cos C}{2 R^2},$$

$$P = \frac{(4R^2 - a^2)^2}{16 R^4 a^2} + \frac{(4R^2 - b^2)^2}{16 R^4 b^2} + \frac{(4R^2 - c^2)^2}{16 R^4 c^2} - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{16 R^2 a^2 b^2 c^2},$$

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{16 R^4 a^2 b^2 c^2} \Big\{ & 4 R^2 (a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2)[4 R^2 - a^2 - b^2 - c^2] \\ & - 16 R^2 a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) \\ & + R^2 (a^2 + b^2 + c^2)^3 \Big\}; \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) \\ & = 2abc(a \cos A + b \cos B + c \cos C) \\ & = 2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4 \\ & = -(a^2 + b^2 + c^2) + 4(a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2) \\ & = 2abc \times \frac{2S}{R} = \frac{a^2 b^2 c^2}{R^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$4 R^2 (a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 R^2 + a^2 b^2 c^2;$$

en tenant compte de cette relation la valeur de P devient

$$P = \frac{R^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3 a^2 b^2 c^2}{4 R^2 a^2 b^2 c^2},$$

d'où

$$K^3 = - \frac{\sqrt{R^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3 a^2 b^2 c^2}}{16}.$$

Calcul de d. — La longueur d est la distance du point F à la bitangente, le point F a pour coordonnées

$$\frac{R}{4}[3\cos A + 2\cos B\cos C],$$

$$\frac{R}{4}[3\cos B + 2\cos A\cos C],$$

$$\frac{R}{4}[3\cos C + 2\cos B\cos A];$$

$$d = \frac{\sum \frac{\cos^2 A}{a}\frac{R}{4}[3\cos A + 2\cos B\cos C]}{\sqrt{P}},$$

d'où

$$d\sqrt{P} = \frac{R}{4}\left[3\sum\frac{\cos^3 A}{a} + 2\cos A\cos B\cos C\sum\frac{\cos A}{a}\right],$$

$$\sum\frac{\cos^3 A}{a} = \frac{1}{abc}\sum\left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2} - \frac{a^2 bc\cos A}{4R^2}\right]$$

$$= \frac{1}{abc}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{abc}{4R}\right]$$

$$\times(a\cos A + b\cos B + c\cos C),$$

$$\sum\frac{\cos^3 A}{a} = \frac{1}{abc}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{a^2b^2c^2}{8R^4}\right],$$

$$2\cos A\cos B\cos C\sum\frac{\cos A}{a}$$

$$= 2\cos A\cos B\cos C\times\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\times\frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8a^2b^2c^2},$$

$$2\cos A\cos B\cos C\sum\frac{\cos A}{a}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\times\frac{4(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) - 8a^2b^2c^2 - (a^2+b^2+c^2)^3}{8a^2b^2c^2},$$

ou en remplaçant

$$4(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) \quad \text{par} \quad (a^2+b^2+c^2)^2 + \frac{a^2b^2c^2}{R^2},$$

$$2\cos A\cos B\cos C\sum\frac{\cos A}{a} = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\,\frac{a^2+b^2+c^2-8R^2}{8R^2},$$

d'où

$$d\sqrt{P} = \frac{R}{4}\,\frac{R^2(a^2+b^2+c^2)^2+4R^4(a^2+b^2+c^2)-3a^2b^2c^2}{8R^4abc},$$

d'où

$$d = \frac{R^2(a^2+b^2+c^2)^2-3a^2b^2c^2+4R^4(a^2+b^2+c^2)}{16R^2\sqrt{R^2(a^2+b^2+c^2)^2-3a^2b^2c^2}}.$$

Nous voyons que les trois paramètres ρ^2, k^3, d s'expriment en fonction de R^2, $a^2+b^2+c^2$, $a^2b^2c^2$; nous allons chercher à résoudre le problème suivant :

Étant donnée une cartésienne, déterminer les triangles inscrits et circonscrits.

Nous avons

$$d = \frac{-k^3}{R^2} - \frac{R^2(a^2+b^2+c^2)}{-4\times 16k^3} \quad \text{et} \quad a^2+b^2+c^2 = 16\rho^2 - R^2,$$

d'où

$$d = \frac{-k^3}{R^2} - \frac{(16\rho^2-R^2)R^2}{16k^3\times 4};$$

la valeur de R^2 est déterminée par l'équation

$$R^6 - 16\rho^2R^4 - 64dk^3R^2 - 64k^6 = 0;$$

posons

$$R^2 = 4\theta,$$

l'équation devient

$$\theta^3 - 4\rho^2\theta^2 - 4dk^3\theta - k^6 = 0;$$

la condition pour que l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

ait ses trois racines réelles est

$$4q^3 - p^2q^2 + r[4p^3 - 18pq + 27r] < 0,$$

ce qui, dans le cas actuel, donne

$$(1) \quad 27k^6 + 16k^3(18d\rho^2 - 16d^3) + 16\rho^4(\rho^2 - d^2) < 0.$$

La cartésienne

$$(x^2 + y^2 - \rho^2)^2 - k^3(x - d) = 0$$

est l'enveloppe des cercles

$$\lambda^2 k(x - d) + 2\lambda(x^2 + y^2 - \rho^2) + k^2 = 0.$$

Les trois foyers simples de la courbe situés sur l'axe s'obtiennent en écrivant que le rayon des cercles précédents est nul, ce qui donne l'équation

$$\lambda^3 + 8\frac{d}{k}\lambda^2 + 16\frac{\rho^2}{k^2}\lambda - 8 = 0;$$

la condition pour que cette équation ait ses trois racines réelles est

$$27k^6 + 16k^3(18\,d\rho^2 - 16d^3) + 16\rho^4(\rho^2 - d^2) < 0;$$

nous retrouvons l'inégalité (1).

Nous pouvons, par suite, énoncer la propriété suivante :

Une cartésienne peut avoir six triangles à la fois inscrits et circonscrits (deux à deux symétriques par rapport à l'axe de la courbe) et la condition nécessaire pour que ces six triangles soient réels est que les trois foyers de la courbe soient réels.

Si l'équation donnant les valeurs de R^2 a ses racines réelles, on voit, d'après le théorème de Descartes, que ces racines sont positives, leur somme étant égale à $16\rho^2$; les valeurs correspondantes de $a^2 + b^2 + c^2$ sont positives, mais il n'en est pas nécessairement de même pour les valeurs de $a^2b^2c^2$. La condition énoncée plus haut n'est donc pas suffisante.

Le problème qui consiste à construire un triangle connaissant le rayon du cercle circonscrit, la somme des carrés des côtés et la surface (ou le produit des côtés) n'est pas susceptible d'une solution géométrique; par suite, étant donnés un triangle et la cartésienne inscrite et circonscrite à celui-ci, il n'est pas possible de déterminer les triangles jouissant de la même propriété.

Remarque. — La courbe inverse de la cartésienne inscrite et circonscrite au triangle ABC (ce triangle étant pris comme triangle de référence) est une courbe du cinquième ordre admettant les points A, B, C et les points cycliques comme points de rebroussement. Par suite, étant donnés cinq points quelconques du plan, il existe une courbe du cinquième ordre et une seule, admettant ces points comme points de rebroussement. Je me propose d'énoncer les principales propriétés de cette courbe dans une étude ultérieure.