Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 39-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__39_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Avis.

Nous prions les lecteurs qui nous adressent des solutions de questions proposées de vouloir bien se conformer aux prescriptions suivantes :

1° N'écrire que sur un côté de chaque feuillet;

2° Dessiner avec soin les figures sur des feuilles à part;

3° En tête de chaque solution, indiquer le numéro de la question, puis l'année et la page du Volume où l'énoncé a paru; reproduire intégralement l'énoncé, en indiquant entre parenthèses le nom de l'auteur; enfin, faire précéder la solution proprement dite de l'indication :

SOLUTION,

par M....

2127.

(1909, p. 192.)

D'un point P on mène quatre normales à une conique : soient α, β, γ, δ les centres de courbure situés sur ces quatre normales. De chacun des points α, β, γ, δ on peut mener deux autres normales à la conique. Démontrer que ces huit droites sont tangentes à une même conique.

(G. CUNY.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

On connaît le théorème suivant : *Si parmi les n^2 points d'intersection de deux courbes d'ordre n, np se trouvent sur une courbe de degré $p(p < n)$, les $n(n-p)$ points restant seront situés sur une courbe d'ordre $n-p$.* (*Voir*, par exemple, SALMON, *Géométrie analytique*, t. II, p. 26.) En particulier si l'on considère une courbe du quatrième ordre et une droite la coupant en α, β, γ, δ. les points d'intersection de la courbe autres que α, β, γ, δ avec les tangentes à celle-ci en ces points seront sur une conique.

Corrélativement, si l'on considère une courbe de quatrième classe et un point P, si α, β, γ, δ sont les contacts des tangentes à la courbe issues de P, les tangentes à cette dernière issues de α, β, γ, δ seront tangentes à une conique.

2140.

(1909, p. 480.)

D'un point P *on mène les trois normales à une parabole. Soient* P′ *le symétrique du point* P *par rapport à l'axe de la parabole;* G *le centre de gravité du triangle ayant pour sommets les centres de courbure situés sur les trois normales;* R *le point de rembroussement de la développée. Démontrer que les trois points* R, P′, G *sont en ligne droite, et que l'on a* RP′ = P′G. (G. CUNY.)

SOLUTION

Par M. PARROD.

Soient $y^2 = 2x$ l'équation de la parabole, (x_0, y_0) les coordonnées du point P et (X, Y) celles d'un point de contact d'une normale menée de P avec la développée; y étant l'ordonnée du pied d'une normale, on a

$$y^3 + 2y(x_0 - 1) + 2y_0 = 0$$

et les coordonnées d'un point de contact XY sont:

$$X = 1 + \frac{3y^2}{2},$$
$$Y = \quad -y^3.$$

Les coordonnées du point G sont:

$$\xi = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) = 1 + \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2},$$
$$\eta = \frac{1}{3}(Y_1 + Y_2 + Y_3) \quad = -(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3);$$

donc

$$\xi = 2x_0 - 1,$$
$$\eta = \quad -2y_0.$$

On voit ainsi la propriété énoncée.

Autres solutions par MM. BARISIEN, BOUVAIST, GAEDECKE, PÉLISSIER.

2142.

(1909, p. 576.)

Si un cône du second ordre est circonscrit à un tétraèdre, tout plan passant par le sommet du cône coupe celui-ci et les quatre faces du tétraèdre suivant six droites tangentes à une conique. (THIÉ.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient ABCD le tétraèdre, S le sommet du cône considéré, P un plan sécant passant par S. Soient enfin α, α', β, β', γ, γ' les traces sur le plan P des arêtes AB, CD, AC, BD, AD, BC. Les cônes de sommet S circonscrits au tétraèdre forment un faisceau ponctuel et les génératrices suivant lesquelles ils sont coupés par le plan P forment un faisceau en involution F dont trois couples de rayons homologues sont $S\alpha$, $S\alpha'$, $S\beta$, $S\beta'$, $S\gamma$, $S\gamma'$, chacun d'eux correspondant aux cas de décomposition du cône en un système de deux plans. D'autre part les tangentes menées par S aux coniques inscrites dans le quadrangle $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ forment un faisceau involutif Φ qui, ayant trois couples de rayons communs avec F, se confond avec lui. La proposition à démontrer en résulte immédiatement.

Solution semblable par M. KLUG.

2143.

(1910, p. 48.)

Soient ABCD *un tétraèdre et* P *un point quelconque de l'espace. La droite* PA *rencontre la face* BCD *en* A_1 *et les droites* BA_1, CA_1, DA_1 coupent CD, DB, BC *en* L, M, N. On *joint le milieu* I *de* AA_1 *au centre* O *de la conique inscrite à* BCD *en* L, M, N. *A chacun des sommets du tétraèdre correspond une droite* IO.

Démontrer que ces quatre droites sont concourantes.

(SONDAT.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Il existe une quadrique Σ tangente aux faces du tétraèdre ABCD aux points A_1, B_1, C_1, D_1, où les droites PA, PB, PC, PD coupent les faces de celui-ci. Soient Γ le cône de sommet A circonscrit à Σ; L, M, N les points où les droites AB_1, AC_1, AD_1 coupent CD, BD, BC, et enfin soient α, β, γ les points où LM, MN, LN coupent respectivement BC, BD, CD.

Soit O le centre de la conique σ, section du cône Γ par BCD, la droite OA_1 est par rapport à σ le diamètre conjugué de $\alpha\beta\gamma$. Le plan $B_1C_1D_1$ détermine par ses intersections avec les faces ABC, ABD, ACD un triangle circonscrit à la conique σ', de raccordement de la quadrique Σ et du cône Γ, les droites αD_1, βB_1, γC_1, sont les tangentes à σ' en D_1, B_1, C_1, et le plan AA_1O coupe le plan $B_1C_1D_1$ suivant le diamètre conjugué de $\alpha\beta\gamma$ dans σ'; c'est par suite un plan diamétral de la quadrique Σ. Soient R et S les points d'intersection de la droite A_1O avec la conique σ; le plan AA_1O coupe Σ suivant une section centrale inscrite dans le triangle RAS et tangente à RS en A_1; or le lieu des centres des coniques inscrites dans RAS et touchant RS en A_1 n'est autre que la droite IO qui, dès lors, passe par le centre ω de Σ. Les trois autres droites analogues à IO passent de même par ω.

Autre solution par M. Klug.

2148.

(1910, p. 144.)

Pour chaque normale à l'ellipse inclinée à 45° sur les axes de l'ellipse, le centre de courbure du pied de la normale est au milieu de la corde de l'ellipse interceptée par la normale. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Thié.

M étant un point quelconque d'une ellipse, on sait que le cercle osculateur en M peut se construire de la façon suivante :

on mène dans l'ellipse la corde MN, que fait avec les axes les mêmes angles que la tangente en M; le cercle osculateur cherché est le cercle tangent à l'ellipse en M et passant en N.

Dans le cas où la normale en M et par suite la tangente au même point sont inclinées à 45° sur les axes, la corde MN se confond avec la normale; le cercle osculateur en M est donc le cercle de diamètre MN, ce qui établit la proposition.

Autres solutions par MM. Klug et Lez.

2146.

(1910, p. 96.)

On considère la conchoïde centrale de la podaire centrale de l'ellipse (axes 2a et 2b), obtenue en augmentant ou diminuant les rayons vecteurs de la podaire de la longueur K. *Si* A *désigne l'aire de la podaire et* s *le périmètre de l'ellipse* E, *on a pour les aires de chacune des deux courbes constituant la conchoïde*

$$\begin{aligned} U_1 &= A + \pi K^2 + Ks \\ U_2 &= A + \pi K^2 - Ks \end{aligned} \qquad \left(A = \pi \frac{a^2 + b^2}{2}\right).$$

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Thié.

Plus généralement supposons que E soit une courbe fermée plane quelconque, et que le point O par rapport auquel on construit la podaire de E, puis une conchoïde de cette podaire, soit quelconque à l'intérieur de E. Soient, en prenant le point O pour pôle avec un axe polaire quelconque :

ρ, ω les coordonnées polaires d'un point de E;
r, θ les coordonnées polaires du point correspondant de la podaire.

On a pour expression de l'aire de la conchoïde :

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r + K)^2\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta + K\int_0^{2\pi} r\, d\theta + \pi K^2 \\ &= A + \pi K^2 + K\int_0^{2\pi} r\, d\theta. \end{aligned}$$

Soit V l'angle que fait la tangente à E avec le rayon vecteur; on a

$$r = \rho \sin V, \qquad \theta = \omega + V - \frac{\pi}{2}.$$

On peut donc écrire

$$\int_0^{2\pi} r\, d\theta = \int_E \rho \sin V (d\omega + dV),$$

le second membre pouvant être considéré comme une intégrale curviligne prise le long de E. Mais on a, avec les notations habituelles,

$$\rho\, d\omega = \sin V\, ds,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} r\, d\theta = \int_E \sin^2 V\, ds + \int_E \rho \sin V\, dV.$$

Pour évaluer la dernière intégrale, intégrons par parties. Il vient

$$\int_E \rho \sin V\, dV = (-\rho \cos V)_E + \int_E \cos V\, d\rho.$$

Le premier terme du second membre est évidemment nul, et l'on a de plus

$$d\rho = \cos V\, ds;$$

on a donc finalement

$$\int_0^{2\pi} r\, d\theta = \int_E \sin^2 V\, ds + \int_E \cos^2 V\, ds = \int_E ds = s,$$

s étant le périmètre de E. En portant cette valeur dans l'expression de U_1, on obtient

$$U_1 = A + \pi K^2 + Ks,$$

ce qui est bien la valeur indiquée dans l'énoncé. On vérifierait de même la valeur de U_2.

Autre solution par M. BOUVAIST.

2147.

(1910, p. 143.)

Écrire, en employant les neuf chiffres autres que zéro, trois nombres ayant respectivement deux, trois et quatre chiffres, tels que le troisième de ces nombres soit égal au produit des deux premiers.

On a, par exemple,

$$12 \times 483 = 5796.$$

Il y a d'autres solutions. On demande de les trouver toutes. (R. B.)

SOLUTION

Par M. THIÉ.

Soient A, B, C les sommes respectives des chiffres du premier, du second et du troisième nombre. On doit avoir, en appliquant la preuve par 9,

$$AB \equiv C \pmod 9. \tag{1}$$

D'autre part

$$A + B + C = 45,$$

d'où

$$C \equiv -A - B \pmod 9.$$

(1) peut donc s'écrire

$$AB \equiv -A - B \pmod 9$$

ou

$$(A+1)(B+1) \equiv 1 \pmod 9 \tag{2}$$

Observons d'autre part que A est au moins égal à $1+2=3$ et au plus égal à $8+9=17$; B est au moins égal à $1+2+3=6$ et au plus égal à $7+8+9=24$. L'équation indéterminée (2) n'a donc qu'un nombre limité de solutions en A et B. On les examinera successivement pour voir si elles correspondent à des solutions du problème.

Il serait fastidieux de reproduire complètement cette analyse, qu'on abrègera en tirant parti de diverses remarques. Pour donner un exemple de la marche à suivre, examinons en partie le cas

$$A = 12, \qquad B = 15;$$

on a bien

$$(A+1)(B+1) = 13 \times 16 \equiv 4 \times 7 = 28 \equiv 1 \pmod 9.$$

A est alors l'un des nombres

$$39, \quad 48, \quad 57, \quad 75, \quad 84, \quad 93.$$

Essayons $A = 39$. Le premier chiffre de B ne peut être que 1 ou 2, sinon le produit AB aurait 5 chiffres; si ce chiffre est 1, B est nécessairement l'un des nombres

$$168, \quad 186.$$

On trouve

$$39 \times 168 = 6552, \qquad 39 \times 186 = 7254.$$

La seconde multiplication donne seule une solution.

Si le premier chiffre de B est 2, B est l'un des nombres

$$258, \quad 285.$$

285 est inadmissible, car C serait encore terminé par 5; 258 ne convient pas non plus, car le produit 39×258 a 5 chiffres.

On essaiera de même les autres valeurs de A correspondant au cas examiné.

On reconnaît en définitive que la question proposée n'admet que les *sept* solutions suivantes :

$$12 \times 483 = 5796, \qquad 18 \times 297 = 5346,$$
$$27 \times 198 = 5346, \qquad 28 \times 157 = 4396,$$
$$39 \times 186 = 7254, \qquad 42 \times 138 = 5796,$$
$$48 \times 159 = 7632.$$

On peut encore chercher à résoudre le problème, en supposant que les nombres de chiffres de A, B, C sont respectivement 1, 4 et 4. On trouve les deux solutions

$$4 \times 1738 = 6952,$$
$$4 \times 1963 = 7852.$$

Les neuf solutions indiquées ci-dessus ont été données aussi par M. H.-E. Dudeney, dans le numéro d'août 1910 de la revue anglaise *The Strand Magazine*.

Enfin j'ai cherché à étendre le problème au cas où l'on admet le chiffre 0 parmi ceux qui composent les nombres A, B, C. J'ai obtenu les résultats suivants :

$$4 \times 3907 = 15628,$$
$$4 \times 7039 = 28156,$$
$$27 \times 594 = 16038,$$
$$39 \times 402 = 15678,$$
$$54 \times 297 = 16038.$$

Comme l'analyse devient ici assez laborieuse, je ne puis absolument garantir que je n'ai laissé échapper aucune solution.