NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PROSZYNSKI

Sur la résolution de l'équation intégrale à noyau symétrique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 394-407

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__394_1>

[H11c]

SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE A NOYAU SYMÉTRIQUE;

PAR M A. PROSZYNSKI.

1. Je me suis proposé de trouver la solution de l'équation de M. Fredholm à noyau symétrique (ou plutôt : à noyau de M. Schmidt) par l'application

directe de la formule générale de M. Fredholm à ladite équation.

Soit l'équation intégrale

$$(1) \qquad f(s) + \lambda \int_0^1 K(s, t) f(t)\, dt = \psi(s).$$

La fonction $\psi(s)$ est donnée, $K(s, t)$ est donnée, c'est le noyau.

La fonction inconnue $f(s)$ est donnée par la formule de M. Fredholm

$$(2) \qquad f(s) = \psi(s) - \frac{\lambda \int_0^1 D(\lambda, s, t)\, \psi(t)\, dt}{D(\lambda)},$$

où $D(\lambda)$ et $D(\lambda, s, t)$ sont les séries entières en λ

$$(3) \quad \begin{aligned} D(\lambda) = 1 &+ \frac{\lambda}{1!} \int_0^1 K(s_1 s_1)\, ds_1 \\ &+ \frac{\lambda^2}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s_1 s_1) & K(s_1 s_2) \\ K(s_2 s_1) & K(s_2 s_2) \end{vmatrix} \\ &\times ds_1\, ds_2 + \ldots \\ &+ \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s_1 s_1) & \ldots & K(s_1 s_p) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ K(s_p s_1) & \ldots & K(s_p s_p) \end{vmatrix} \\ &\times ds_1 \ldots ds_p + \ldots; \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} &D(\lambda, s, t) \\ &= -\int_0^1 \psi(t)\, K(s, t)\, dt \\ &\quad - \lambda \int_0^1 \psi(t)\, dt \int_0^1 \begin{vmatrix} K(st) & K(ss_1) \\ K(s_1 t) & K(s_1 s_1) \end{vmatrix} ds_1 - \ldots \\ &\quad - \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \psi(t)\, dt \\ &\quad \times \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(st) & K(ss_1) & \ldots & K(ss_p) \\ K(s_1 t) & K(s_1 s_1) & \ldots & K(s_1 s_p) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ K(s_p t) & K(s_p s_1) & \ldots & K(s_p s_p) \end{vmatrix} \\ &\quad \times ds_1 \ldots ds_p - \ldots. \end{aligned}$$

En employant la notation de M. Fredholm

$$\mathrm{K}(s_p s_q) \equiv (s_p s_q), \qquad \int_0^1 ds_1 \ldots \int_0^1 ds_p \equiv \underset{1.2\ldots p}{\mathbf{S}},$$

on peut écrire le terme général de la série (3) et celui e (4) sous la forme

$$u_{p+1} = \frac{\lambda^p}{p!} \underset{1.2\ldots p}{\mathbf{S}} \begin{vmatrix} (s_1 s_1) & \ldots & (s_1 s_p) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (s_p s_1) & \ldots & (s_p s_p) \end{vmatrix}$$

et

$$u_{p+1} = \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \psi(t)\, dt \underset{1.2\ldots p}{\mathbf{S}} \begin{vmatrix} (st) & (ss_1) & \ldots & (ss_p) \\ (s_1 t) & (s_1 s_1) & \ldots & (s_1 s_p) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (s_p t) & (s_p s_1) & \ldots & (s_p s_p) \end{vmatrix}.$$

2. Si l'équation intégrale est de la forme

$$(5) \qquad f(s) - \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(s, t) f(t)\, dt = \psi(s),$$

où les λ sont négatifs, les séries (3) et (4) deviennent

$$(6) \quad \mathrm{D}(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!} \underset{1}{\mathbf{S}} (s_1 s_1) + \ldots + (-1)^p \frac{\lambda^p}{p!} \underset{1.2\ldots p}{\mathbf{S}} \begin{vmatrix} (s_1 s_1) & \ldots & (s_1 s_p) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (s_p s_1) & \ldots & (s_p s_p) \end{vmatrix};$$

$$(7) \quad \mathrm{D}(\lambda, s, t) = \int_0^1 \psi(t)\, \mathrm{K}(s_1 t)\, dt - \frac{\lambda}{1!} \int_0^1 \psi(t)\, dt \underset{1}{\mathbf{S}} \begin{vmatrix} (st) & (ss_1) \\ (s_1 t) & (s_1 s_1) \end{vmatrix} + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \psi(t)\, dt \times \underset{1.2\ldots p}{\mathbf{S}} \begin{vmatrix} (st) & (ss_1) & \ldots & (ss_p) \\ (s_1 t) & (s_1 s_1) & \ldots & (s_1 s_p) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (s_p t) & (s_p s_1) & \ldots & (s_p s_p) \end{vmatrix}.$$

La formule (2) s'écrit

$$(8) \qquad f(s) = \psi(s) + \frac{\lambda \int_0^1 D(\lambda, s, t)\,\psi(t)\,dt}{D(\lambda)}.$$

La fonction $f(s)$ est méromorphe en λ dans tout le plan de la variable complexe λ; ses pôles sont simples, ce sont les zéros de la fonction $D(\lambda)$. A chaque valeur de λ, différente de la racine de l'équation $D(\lambda) = 0$, correspond la solution unique de l'équation intégrale (5).

3. Appliquons maintenant ces résultats au cas de l'équation considérée par MM. D. Hilbert et Erhardt Schmidt.

Écrivons l'équation intégrale

$$(9) \qquad f(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\,f(t)\,dt = \psi(s),$$

où le noyau $K(s, t)$ est assujetti aux conditions suivantes :

1° Il est symétrique

$$(10) \qquad K(st) \equiv K(ts).$$

2° Il est la somme de produits de fonctions qu'on appelle *les fonctions* φ

$$(11) \qquad K(st) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s)\,\varphi_k(t)}{\lambda_k},$$

où n peut être un nombre fini ou infini.

3° Il est intégrable.

4° Son carré est aussi intégrable.

Le noyau $K(s, t)$ s'appelle le *noyau* de M. Schmidt.

4. Disons maintenant quelques mots sur les fonctions φ : $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ...

Voici leurs propriétés :

1° Elles sont orthogonales

$$\int_0^1 \varphi_k(s)\,\varphi_l(s)\,ds = 0 \qquad (k \neq l). \tag{12}$$

2° Elles sont normales

$$\int_0^1 \varphi_k^2(s)\,ds = 1. \tag{13}$$

3° Elles sont linéairement indépendantes.

5. Les valeurs du paramètre λ, qui sont les zéros de la fonction $D(\lambda)$, sont appelées les *autovaleurs* (Hilbert, Schmidt). La suite des autovaleurs

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\quad \ldots \tag{14}$$

est : 1° dénombrable; 2° pour une autovaleur $\lambda = \lambda_i$ ne correspond qu'un nombre fini des fonctions φ, qu'on appelle *autofonctions;* 3° dans un intervalle fini, il existe un nombre fini d'autovaleurs; 4° les autres valeurs sont réelles; 5° à chaque autovaleur $\lambda = \lambda_l$ correspond une autofonction φ_l qui est une solution de l'équation intégrale homogène symétrique

$$f(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\,f(t)\,dt = 0. \tag{15}$$

L'ensemble d'autofonctions correspondant à toutes les autovaleurs relatif au noyau donné s'appelle le *système complet.*

MM. Hilbert et Schmidt démontrent *le théorème d'existence* qui est le plus essentiel dans cette théorie; voici l'énoncé de ce théorème :

« Si le noyau est symétrique en s et en t, il existe au moins une autovaleur λ_0 de λ (1). »

6. Quelques questions en Mathématiques et surtout en Physique mathématique offrent des exemples de fonctions φ. Citons d'abord les polynomes de Legendre

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\,x, \qquad \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{3x^2-1}{2}, \qquad \ldots .$$

Les limites d'intégration sont $+1$, -1.

Les éléments de série de Fourier

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \qquad \sqrt{\frac{4}{\pi}}\cos 2x, \qquad \ldots, \qquad \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\cos nx, \qquad \ldots .$$

Les limites d'intégration sont π et 0.

La suite des dérivées premières des intégrales de l'équation linéaire

$$(16) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda\,\mathrm{A}(x) = 0,$$

où λ n'est pas quelconque : ses valeurs sont les pôles de l'intégrale de (16), qui est une fonction méromorphe en λ; on démontre d'ailleurs que ces pôles sont réels et simples. Dans le problème des cordes vibrantes et celui du mur, l'intégrale de l'équation (16) est prise entre des limites finies, tandis que dans les problèmes d'armille, du refroidissement de la sphère, elle doit satisfaire aux conditions limites. La recherche de la fonction harmonique (les problèmes de Dirichlet et de Neumann) se ramène à l'équation intégrale de

(1) *Voir :* Picard, *Cours professé pendant le second semestre à la Faculté des Sciences de Paris, en* 1909, et d'Adhemard, *L'équation de Fredholm et les problèmes de Dirichlet et de Neumann*, 1909, Paris.

Fredholm

$$f(s)+\lambda\int_0^{\Gamma} f(\sigma)\frac{1}{\pi}\frac{\cos\varphi}{r}\,d\sigma=\frac{\psi(s)}{\pi},$$

où Γ est la longueur du contour, s est un point fixe, σ est un point mobile du contour; φ est l'angle de la normale extérieure au point σ avec le rayon r qui joint le point s au point σ; $f(s)$ est l'inconnue (la densité).

7. Cherchons maintenant la solution de l'équation (9). A cet effet, calculons d'abord la fonction $D(\lambda)$ donnée par la formule (6).

Le second terme se calcule immédiatement

$$(17)\qquad \int_0^1 K(s_1 s_1)\,ds_1=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\frac{\varphi_i^2(s_1)\,ds_1}{\lambda_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}.$$

Calculons le déterminant d'ordre i qui figure dans la formule (6). A cause de la symétrie de $K(s, t)$ on peut écrire ce déterminant sous la forme

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} K(s_1 s_1) & K(s_1 s_2) & \dots & K(s_1 s_i) \\ K(s_1 s_2) & K(s_2 s_2) & \dots & K(s_2 s_i) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ K(s_1 s_i) & K(s_2 s_i) & \dots & K(s_1 s_i) \end{vmatrix} \equiv \sum \pm \varphi_{11}\varphi_{22}\dots\varphi_{ii},$$

en désignant

$$(19)\qquad \varphi_{kl}\equiv\frac{\varphi_1(s_k)\,\varphi_1(s_l)}{\lambda_1}+\frac{\varphi_2(s_k)\,\varphi_2(s_l)}{\lambda_2}+\dots+\frac{\varphi_n(s_k)\,\varphi_n(s_l)}{\lambda_n}.$$

Il s'agit maintenant de calculer le résultat de l'i-uple intégration du déterminant (18). La chose se simplifie considérablement à cause des propriétés des fonctions φ_i (n° 5) qui entrent dans les éléments du déterminant en question.

Dans le développement du déterminant (18) nous aurons les termes suivants :

(*a*) Le terme

$$\varphi_{kk} \equiv \sum_l \frac{\varphi_l^2(s_k)}{\lambda_l}. \tag{20}$$

Le résultat de l'intégration est évidemment

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\lambda_l}.$$

(*b*) Des éléments φ_{jk} et φ_{kj} donnent, après une double intégration, le même résultat. En effet, à cause de (10) on écrit

$$\varphi_{jk}\varphi_{kj} \equiv \sum \left[\frac{\varphi_l(s_j)\,\varphi_l(s_k)}{\lambda_l}\right]^2. \tag{21}$$

En intégrant deux fois, on trouve

$$\int_0^1 \int_0^1 \sum \left[\frac{\varphi_l(s_j)\,\varphi_l(s_k)}{\lambda_l}\right]^2 ds_j\, ds_k = \sum_l \frac{1}{\lambda_l^2}. \tag{22}$$

8. Cela étant, je dis que dans le résultat de l'i-uple intégration du déterminant (18) on aura trois espèces de termes :

1° D'abord le terme principal qui, d'après (*a*), devient

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_{11}\varphi_{22}\ldots\varphi_{11}\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_i = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}\right]^i. \tag{23}$$

2° Considérons le produit

$$\varphi_{1k_1}\varphi_{2k_2}\ldots\varphi_{jk_j}\ldots\varphi_{ik_i}. \tag{α}$$

Supposons qu'il renferme l fois la somme φ_{jj} et m paires de sommes symétriques $(\varphi_{pq}, \varphi_{qp})$.

Le résultat d'intégration est

$$\left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^l \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2}\right]^m. \tag{24}$$

3° Supposons que dans (α) se trouvent i facteurs : φ_{jk} où $j \neq k$ et que les indices de deux facteurs quelconques φ_{jk_j} et φ_{lk_l} soient tels qu'on ait $k_j \neq l$ et $j \neq k_l$. Dans ce cas, le résultat de l'i-uple intégration sera

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k^i}. \tag{25}$$

Écrivons enfin l'i-uple intégrale d'un produit (α) composé de t sommes φ_{kk}, m paires (φ_{pq}, φ_{qp}) et j facteurs $\varphi_{r_1 f_1} \varphi_{r_2 f_2} \varphi_{r_j f_j}$ où $r_k \neq f_k$ et $r_k \neq f_l$, $r_l \neq f_k$,

$$\left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^l \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2}\right]^m \sum_k \frac{1}{\lambda_k^j}; \tag{26}$$

avec les conditions : 1° $l + 2m + j = i$; 2° $l \neq i$, $m \neq i$ [1].

La vérification de ces résultats n'offre aucune difficulté.

Démontrons par exemple le 3°. Il faut calculer l'intégrale i-uple

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_{1a_1} \varphi_{2a_2} \cdots \varphi_{ia_i} \, ds_1 \, ds_2 \ldots ds_2, \tag{27}$$

ou

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s_1)\varphi_k(s_{a_1})}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s_2)\varphi_k(s_{a_2})}{\lambda_k} \cdots ds_1 \ldots ds_k.$$

Parmi les nombres a_1, a_2, ..., a_i se trouvent évi-

[1] Ces termes (26) se rencontrent pour la première fois dans le développement du déterminant du sixième ordre ($i = 6$).

demment 1, 2, ..., n; or, en faisant le produit des premiers termes de chaque somme Σ, on obtient

$$\frac{\varphi_1^2(s_1)\,\varphi_1^2(s_2)\ldots\varphi_1^2(s_i)}{\lambda_1^i},$$

l'i-uple intégrale de ce terme est donc

$$\frac{1}{\lambda_1^i}.$$

D'une pareille manière, le produit des seconds termes de chaque somme Σ est

$$\frac{\varphi_2^2(s_1)\,\varphi_2^2(s_2)\ldots\varphi_2^2(s_i)}{\lambda_2^i};$$

le résultat d'intégration est

$$\frac{1}{\lambda_2^i}.$$

Le résultat total est évidemment

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^i}.$$

9. *Théorème.* — L'intégrale multiple (i-uple) du déterminant d'ordre i (18) est égale à la somme des $\binom{n}{i}$ termes, formés de la façon suivante : le numérateur de chacun de ces termes est $i!$ et le dénominateur est un produit de i facteurs $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \ldots, \lambda_{k_i}$ dont les indices forment une certaine combinaison faite avec les nombres 1, 2, ..., n pris i à i. Or, nous avons la formule à démontrer

$$(28)\quad \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \sum \pm\,\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33}\ldots\varphi_{ii}\,ds_1\,ds_2\,ds_3\ldots ds_i = i!\sum_{\binom{n}{i}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i},$$

où $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$ c'est le nombre de termes du développement. Pour démontrer ce théorème, remarquons d'abord que les formules (23), (24) ([1]), (25) montrent que le résultat de l'intégration du terme principal (23) contient un groupe de terme composé de $\frac{1}{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i}$ et que ce groupe n'a pas de semblables dans tout le développement, tandis que tous les autres groupes de termes ont des semblables. Je dis d'ailleurs qu'ils se détruisent. En effet, les éléments desquels sont formés tous les termes sont les suivants :

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{\lambda_1}, & \frac{1}{\lambda_2}, & \ldots, & \frac{1}{\lambda_n}, \\
\frac{1}{\lambda_1^2}, & \frac{1}{\lambda_2^2}, & \ldots, & \frac{1}{\lambda_n^2}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\frac{1}{\lambda_1^i}, & \frac{1}{\lambda_2^i}, & \ldots, & \frac{1}{\lambda_n^i}.
\end{array}$$

Si nous formons tous les groupes possibles homogènes de degré d'homogénéité égal à i, il est évident que ces groupes seront précisément ceux du développement du déterminant (18) après une i-uple intégration. Le coefficient de chaque groupe est le même dans l'ensemble de termes négatifs et dans celui de termes positifs, il est égal à $\frac{i'}{2}$; d'ailleurs chaque groupe $\left(\text{sauf le groupe composé de termes tels que } \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2, \ldots, \lambda_i}\right)$ a son semblable qui se trouve dans l'autre ensemble, et par conséquent tous ces groupes se détruisent mutuellement; il ne reste donc que le groupe

$$i!\sum \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} \quad ([2]).$$

([1]) Pourvu qu'on ait $l \neq i$.

([2]) Le calcul effectif montre que si i est pair, la somme des

10. Écrivons maintenant la fonction $D(\lambda)$. A cet effet, nous nous servons des formules (6), (18) et (28)

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!} 1! \sum \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\lambda^2}{2!} 2! \sum \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} n! \sum \frac{1}{\lambda_1 \ldots \lambda_n},$$

ou en simplifiant, on obtient finalement

$$(29) \quad D(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^n}\right) \equiv \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right).$$

On voit manifestement que les pôles de la fonction $D(\lambda)$ sont précisément les autovaleurs $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$.

---

exposants de $\sum$ est paire dans l'ensemble positif et impaire dans l'ensemble négatif, en outre il y a $i - 2$ termes différents dans l'ensemble positif et $i - 3$ dans l'ensemble négatif. Voici les résultats finals :

$$i = 4 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \pm \sum \varphi_{11} \varphi_{22} \varphi_{33} \varphi_{44} \, ds_1 \, ds_2 \, ds_3 \, ds_4$$
$$= \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^4 + 8 \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^3} + 3 \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2}\right]^2$$
$$- 6 \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^2 \sum \frac{1}{\lambda_k^2} - 6 \sum \frac{1}{\lambda_k^4}$$
$$= 24 \sum_1 \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}.$$

$$i = 5 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \pm \sum \varphi_{11} \ldots \varphi_{55} \, ds_1 \ldots ds_5$$
$$= \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^5 + 20 \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^2 \sum_k \frac{1}{\lambda_k^3}$$
$$+ 15 \sum_k \frac{1}{\lambda_k^3} \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^2 + 24 \sum_k \frac{1}{\lambda_k^5} - 30 \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \sum_k \frac{1}{\lambda^4}$$
$$- 10 \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^3 \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2} - 20 \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^3}$$
$$= 120 \sum \frac{\lambda}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}.$$

11. Calculons le numérateur de la formule (8), c'est-à-dire la fonction $D(\lambda, s, t)$ [on la désigne encore $\Delta(\lambda, s, t)$; *voir*, par exemple, R. D'ADHÉMARD, *L'équation de Fredholm*, 1909]. Il est presque évident que le déterminant d'ordre i qui figure dans (7) se réduit à son premier élément multiplié par le mineur correspondant, qui est précisément le déterminant considéré dans la fonction $D(\lambda)$.

Or nous aurons

$$(30)\quad \int_1^0 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(st) & K(ss_1) & \ldots & K(ss_{i-1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ K(s_{i-1}t) & K(s_{i-1}s_1) & \ldots & K(s_{i-1}s_{i-1}) \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_{i-1}$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum \frac{\varphi_k(s)\,\varphi_k(t)}{\lambda_k}$$

$$\times \begin{vmatrix} \sum_k \frac{\varphi_k^2(s_1)}{\lambda_k} & \ldots & \sum_k \frac{\varphi_k(s_1)\,\varphi_k(s_{i-1})}{\lambda_k} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum_k \frac{\varphi_k(s_1)\,\varphi_k(s_{i-1})}{\lambda_k} & \ldots & \sum_k \frac{\varphi_k^2(s_{i-1})}{\lambda_k} \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_{i-1}$$

$$= \sum_k \frac{\varphi_k(s)\,\varphi_k(t)}{\lambda_k}(i-1)! \sum_{\binom{n}{i-1}} \frac{1}{\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}.$$

Tous les autres mineurs du premier ordre s'annulent à cause de l'identité des éléments, de sorte que la fonction $D(\lambda, s, t)$ devient (7)

$$D(\lambda, s, t) = \sum_k \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \int_0^1 \varphi_k(t)\,\psi(t)\,dt$$

$$- \frac{\lambda}{1} \sum_l{}' \frac{1}{\lambda_l} \sum \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \int_0^1 \varphi_k(t)\,\psi(t)\,dt + \ldots$$

$$+ (-1)^i \frac{\lambda^i}{i!}\, i! \sum \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} \sum_k \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}$$

$$\times \int_0^1 \varphi_k(t)\,\psi(t)\,dt + \ldots,$$

ou en simplifiant, on trouve finalement

$$(31)\quad D(\lambda, s, t) = \sum_k \prod_l{}' \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\right) \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \int_0^1 \varphi_k(s)\psi(t)\,dt \quad (^1).$$

En mettant les formules (30), (31) dans (8) on obtient

$$f(s) = \psi(s) + \frac{\lambda \sum_k \prod{}' \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\right) \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \int_0^1 \varphi_k(t)\psi(t)\,dt}{\prod \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)},$$

ou en développant les Σ et Π on obtient finalement

$$(32)\qquad f(s) = \psi(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} \int_0^1 \varphi_k(t)\psi(t)\,dt.$$

c'est la solution de l'équation (11).

M. E. Schmidt a trouvé cette formule par une méthode tout à fait différente, en s'appuyant sur « le théorème d'évidence ». (*Voir :* M. Picard, *Cours d'Analyse supérieure*, 1909, et R. d'Adhémard, *L'équation de Fredholm*, Paris, 1909.)

---

(1) $\prod_l{}' \left(i - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \left(\text{ou} \sum{}'\right)$ indique que l peut prendre toutes les valeurs sauf $l = k$