NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

É. TURRIÈRE

Sur certaines surfaces généralisant la chaînette de Coriolis

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 385-394

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__385_0>

[M²9e]

SUR CERTAINES SURFACES GÉNÉRALISANT LA CHAINETTE DE CORIOLIS;

PAR M. É. TURRIÈRE.

1. L'une des formules les plus remarquables de la théorie des surfaces, en coordonnées tangentielles, est certainement celle qui donne l'expression de la somme des rayons principaux de courbure R et R'; l'importance de cette expression découle de sa forme linéaire par rapport à la fonction qui individualise la surface et par rapport aux dérivées des deux premiers ordres de cette fonction.

Les axes sont rectangulaires; suivant les cas, suivant qu'il existe ou non une direction ou un axe privilégié (un axe de révolution, par exemple), il y a lieu d'utiliser l'une ou l'autre des équations

$$X\cos\varphi\cos\psi + Y\cos\varphi\sin\psi + Z\sin\varphi = \varpi,$$
$$u(X - iY) + v(X + iY) + (uv - 1)Z = (uv + 1)\varpi,$$

pour représenter le plan tangent. On a alors l'une ou l'autre des expressions

$$(1)\qquad R + R' = 2\varpi - \operatorname{tang}\varphi\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\varpi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varpi}{\partial\psi^2},$$

$$(2)\qquad R + R' = 2\varpi + (1 + uv)^2\frac{\partial^2\varpi}{\partial u\,\partial v}.$$

La seconde de ces expressions a été utilisée dans l'étude de certaines classes de surfaces, telles que les surfaces minima, les surfaces de M. Appell et les surfaces de M. Goursat. Je vais appliquer les relations précédentes à une classe de surfaces qui généralisent les surfaces minima et qui s'introduisent en cherchant à étendre aux surfaces une propriété de la chaînette de Coriolis.

2. La chaînette d'égale résistance de Coriolis est caractérisée par la propriété suivante : la projection de tout rayon de courbure sur une direction fixe a une longueur constante. En cherchant à étendre cette propriété à des surfaces, on est conduit à se poser le problème suivant : *Soient* C, C′ *les centres de courbure principaux en un point* M *d'une surface* (S) *et* A *le milieu du segment* CC′; *déterminer les surfaces* (S) *pour lesquelles le segment* MA *se projette sur une direction fixe suivant un segment de longueur constante.*

Je prendrai l'axe OZ, appartenant à un système d'axes orthogonaux $Oxyz$ et parallèle à la direction considérée; je désignerai par $\frac{a}{2}$ la projection constante de MA sur OZ. R et R′ étant les rayons de courbure principaux, les surfaces (S) seront caractérisées par la propriété

$$R + R' = \pm \frac{a}{\sin\varphi}.$$

Pour $a = 0$, les surfaces (S) se réduisent évidemment aux surfaces minima.

Lorsque a est différent de zéro, il suffit de connaître une solution (S_0) du problème pour en déduire toutes les autres, par une construction géométrique fort simple. Considérant, en effet, une surface quelconque comme enveloppe du plan d'équation

$$p_1 x + p_2 y + p_3 z = \varpi,$$

où p_1, p_2, p_3 désignent les cosinus directeurs de la normale au point de contact M avec la surface et où ϖ désigne la distance de l'origine des coordonnées O au plan tangent en M, soit ϖ_0 la fonction relative à la solution particulière (S_0) supposée connue; soit de même ϖ_1 la fonction ϖ relative à la surface minima générale (S_1). Dans ces conditions, il est évident que la solution ϖ la plus générale du problème posé est donnée par la formule

$$\varpi = \varpi_0 + \varpi_1,$$

qui s'interprète immédiatement : soient (Σ), (Σ_0), (Σ_1) les podaires de la surface générale cherchée (S), de la surface particulière (S_0) et de la surface minima générale (S_1), par rapport au point O; soient μ, μ_0, μ_1, trois points correspondants, respectivement sur (Σ), (Σ_0), (Σ_1), et alignés avec O; la relation précédente exprime qu'on a

$$O\mu = O\mu_0 + O\mu_1,$$

d'où la construction de μ connaissant μ_0 et μ_1 [1].

3. La solution particulière (s_0) peut être obtenue de plusieurs manières. On peut tout d'abord chercher les surfaces (S) qui sont de révolution autour de OZ. Posons

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\frac{dz}{d\rho} = f(\rho);$$

l'équation aux dérivées partielles du second ordre des

---

[1] La méthode précédente est générale et s'appliquerait au cas où le segment MA serait une fonction quelconque et donnée des cosinus directeurs p_1, p_2, p_3.

surfaces (S) étant, en coordonnées ordinaires,

$$(3)\qquad a(rt+s^2)=r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2),$$

la fonction f doit satisfaire à la relation

$$\frac{d\rho}{df}(af-\rho)=f(1+f^2);$$

celle-ci est une équation différentielle du premier ordre, qui est linéaire par rapport à la fonction ρ envisagée comme étant une fonction inconnue de la variable f; et cette équation linéaire

$$\frac{df}{d\rho}=-\frac{\rho}{f(1+f^2)}+\frac{a}{1+f^2},$$

admet pour intégrale générale

$$\rho=-\frac{a}{f}+\frac{2A\sqrt{1+f^2}}{f},$$

A désignant la constante arbitraire d'intégration; il en résulte alors, pour z, l'expression suivante

$$z=\operatorname{Log}\left\{f^a\left(\frac{\sqrt{1+f^2}+1}{\sqrt{1+f^2}-1}\right)^{A}\right\},$$

à une constante additive près, qui peut évidemment être prise égale à zéro.

Pour la valeur zéro de a, les expressions précédentes de ρ et de z conduisent aux relations

$$f=\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{z}{2A}},\qquad \rho=2A\operatorname{ch}\frac{z}{2A}$$

dont la seconde représente bien la chaînette ordinaire.

Pour toute autre valeur de a, les expressions précédentes de ρ et de z qui représentent la méridienne de la surface de révolution cherchée peuvent être mises sous diverses formes en prenant pour paramètre un arc ω ou un argument θ liés à f par l'une ou l'autre des relations

$$f = \operatorname{sh} 2\theta,$$
$$f = \operatorname{tang} 2\omega.$$

Mais ce qui importe surtout c'est d'obtenir une solution simple du problème posé. Une solution de cette nature s'obtient aisément en particularisant la constante arbitraire A. En prenant $A = 0$, on obtient la surface engendrée par la courbe exponentielle

$$(4) \qquad -\frac{z}{a} = \operatorname{Log}\left(\frac{-\rho}{a}\right),$$

surface qui est homothétique à la surface

$$z = \operatorname{Log} \rho\,;$$

en prenant $A = \frac{1}{2}a$ $\left(\text{ou } -\frac{1}{2}a\right)$ on obtient aussi une surface particulièrement simple; les expressions de ρ et de z se réduisant en effet à

$$\rho = \frac{af}{\sqrt{1+f^2}+1},$$
$$z = a \operatorname{Log}\left(\sqrt{1+f^2}+1\right),$$

il vient, à une constante additive près qu'il est permis de négliger,

$$(5) \qquad -\frac{z}{a} = \operatorname{Log}\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right),$$

équation d'une surface homothétique à celle dont l'équation est

$$z = \operatorname{Log}(1-\rho^2).$$

4. La détermination des surfaces de révolution qui

sont des solutions du problème posé, peut être également effectuée en coordonnées tangentielles. Puisque l'axe OZ est un axe de révolution, il y a lieu d'utiliser la relation (1)

$$R + R' = 2\varpi - \tang\varphi \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\varpi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varpi}{\partial\psi^2};$$

il s'agit de chercher les solutions ϖ indépendantes de la longitude ψ de l'équation aux dérivées partielles obtenue en écrivant

$$R + R' = \frac{a}{\sin\varphi}.$$

Je poserai

$$\varpi = \sin\varphi . \Phi,$$

Φ désignant une fonction de la seule variable φ; l'expression de $R + R'$ devient pour une surface générale de révolution

$$(6)\qquad R + R' = \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\sin^2\varphi\cos\varphi\frac{d\Phi}{d\varphi}\right);$$

l'équation différentielle du second ordre qu'il s'agit d'intégrer est donc réductible à deux quadratures, qui s'effectuent sans difficulté et donnent la relation

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1,$$

où l'on pose

$$\Phi_0 = - a \operatorname{Log}(\tang\varphi)$$

et où Φ_1 représente la fonction Φ relative au caténoïde; pour solution particulière (S_0), on peut donc prendre

$$(7)\qquad \varpi_0 = - a \sin\varphi \operatorname{Log}(\tang\varphi)$$

qui représente, à une translation près, la surface (4), précédemment obtenue.

5. Dans les deux paragraphes précédents, je me suis

occupé de la détermination d'une surface (S) de révolution. Mais il est possible de trouver des solutions particulières du problème par une méthode différente.

Étant donnée l'équation, en coordonnées ordinaires,

$$r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)=0,$$

des surfaces minima, Scherk a découvert la solution particulière dépendant d'un paramètre λ

$$e^{\lambda z}=\frac{\cos\lambda y}{\cos\lambda x} \tag{8}$$

en cherchant une solution de la forme

$$z = \text{fonction de } x + \text{fonction de } y.$$

La même méthode appliquée à l'équation (3) conduit également à des surfaces (S) remarquables. Posant, en effet,

$$z=\mathrm{X}(x)+\mathrm{Y}(y),$$

cette équation (3) donne

$$\frac{1+x'^2}{x''}+\frac{1+y'^2}{y''}=a, \tag{9}$$

après division par X″ et Y″ : l'une des dérivées secondes X″, Y″ ne peut être nulle, car d'après l'équation (3) les deux dérivées sont nulles si l'une est supposée l'être, en se bornant en outre aux surfaces réelles; supposer X″ et Y″ simultanément nulles conduit à une surface dégénérée en un plan arbitraire.

Dans la relation (9), les variables sont séparées; on doit donc poser, puisque les variables xy sont indépendantes,

$$\frac{1+x'^2}{x''}=a\frac{1+\lambda}{2},$$

$$\frac{1+y'^2}{y''}=a\frac{1-\lambda}{2},$$

λ désignant un paramètre arbitraire et constant; les deux équations différentielles du second ordre précédentes ont pour intégrales générales :

$$X = -\frac{a(1+\lambda)}{2}\operatorname{Log}\left(\cos\frac{2(x-x_0)}{a(1+\lambda)}\right) + X_0,$$
$$Y = -\frac{a(1-\lambda)}{2}\operatorname{Log}\left(\cos\frac{2(y-y_0)}{a(1-\lambda)}\right) + Y_0,$$

avec quatre constantes d'intégration x_0, y_0, X_0, Y_0, qu'il est permis de prendre égales à zéro. La surface (S_0) ainsi déterminée, et dépendant du paramètre λ, a donc pour équation :

$$-z = \frac{a(1+\lambda)}{2}\operatorname{Log}\left[\cos\frac{2x}{a(1+\lambda)}\right] + \frac{a(1-\lambda)}{2}\operatorname{Log}\left[\cos\frac{2y}{a(1-\lambda)}\right];$$

cette surface (S_0) présente une particularité intéressante : *les lignes conjuguées* $x =$ const., $y =$ const. *qui par translation engendrent la surface, sont des chaînettes de Coriolis.*

Les lignes asymptotiques et les lignes de plus grande pente, l'axe Oz étant supposé vertical, sont immédiatement déterminables, les équations différentielles correspondantes étant à variables séparées. Quant aux lignes de courbure, leur équation n'est à variables séparées que lorsque λ prend la valeur zéro; la surface (S) correspondante

$$e^{-\frac{2z}{a}} = \cos\frac{2x}{a}\cos\frac{2y}{a}$$

présente la plus grande analogie avec la surface minima de Scherk. Ces deux surfaces sont homothétiques aux surfaces d'équations

$$(10)\qquad \begin{cases} e^{-z} = \cos x \times \cos y, \\ e^{-z} = \dfrac{\cos x}{\cos y}; \end{cases}$$

les projections des lignes de plus grande pente de chacune d'elles sont superposables aux projections des lignes de niveau de l'autre.

Les lignes de courbure de la surface représentée par l'équation (10) s'obtiennent immédiatement, leur équation différentielle étant

$$\frac{dx^2}{\cos^2 x} = \frac{dy^2}{\cos^2 y};$$

il convient de remarquer que, puisque cette équation différentielle ne contient pas de terme en $dx\,dy$, la surface est intégrale particulière d'une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$r(1+q^2) = t(1+p^2)$$

qui fut étudiée par Fuchs ([1]) et ramenée par lui à la forme

$$2(\alpha+\beta)\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\beta}.$$

Pour terminer l'énumération des propriétés de la surface (10), je ferai observer que cette surface rentre dans la classe de surfaces d'équation

$$e^z \cos x \cos y = \text{const},$$

qui appartiennent à un des premiers systèmes triple-orthogonaux connus : d'où découle une nouvelle méthode de détermination de ses lignes de courbure.

6. Le problème que je m'étais proposé au deuxième

([1]) Fuchs, *Integration der partiellen Differentialgleichung*

$$r(1+q^2) - t(1+p^2) = 0$$

(*Journal de Crelle*, 1860). L'équation considérée par Fuchs est celle des surfaces dont les tangentes principales sont, en projection sur Oxy et en direction dans ce plan, symétriques par rapport aux axes Ox, Oy.

paragraphe est donc complètement résolu, puisque j'ai obtenu diverses solutions particulières, dépendant d'ailleurs de constantes arbitraires, ce qui n'était pas nécessaire. Il est possible de prendre pour la solution particulière (S_0) l'une des surfaces simples et remarquables qui ont été signalées plus haut. Je choisirai, par exemple, la solution (7); elle est susceptible d'être mise sous la forme

$$\varpi = a \frac{1 - uv}{uv + 1} \operatorname{Log} \frac{uv - 1}{\sqrt{uv}},$$

qu'il est possible d'obtenir directement d'ailleurs à partir de l'expression (2). Pour éviter l'introduction d'imaginaires dans l'équation des surfaces minima, j'utiliserai les coordonnées u et v, et non les coordonnées φ et ψ. Dans ces conditions, l'équation générale des surfaces (S) cherchées prend la forme

$$-\frac{\varpi}{a} = \frac{uv - 1}{uv + 1} \operatorname{Log} \frac{uv - 1}{\sqrt{uv}} + U' + V' - \frac{2(vU + uV)}{uv + 1}$$

dans laquelle $U(u)$ et $V(v)$ désignent deux fonctions arbitraires de chacune des variables u et v, et U', V' leurs dérivées.