Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 377-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__377_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1579.

(1888, p. 112.)

Si les nombres positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont tels que l'on ait $(a_n - n) = a$ pour n infini, on aura également

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{a_1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n} = e^a.$$

E. Cesaro.

SOLUTION,

Par M. G. Polya.

Prenons

$$a_1 = 1 + r_1, \qquad a_2 = 2 + r_2, \qquad \ldots, \qquad a_n = n + r_n, \qquad \ldots$$

et nous avons à examiner l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{(1 + r_1)(2 + r_2)^2 \ldots (n + r_n)^n}$$

$$= \frac{e^{\frac{n}{4}}}{n^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt[n]{1^1 2^2 3^3 \ldots n^n} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{r_1}{1}\right)\left(1 + \frac{r_2}{2}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^n}.$$

Par hypothèse

$$\lim r_n = a,$$

$$\lim \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^n = e^a;$$

on en conclut aisément :

$$\lim \sqrt[n]{\left(1 + \frac{r_1}{1}\right)\left(1 + \frac{r_2}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{r_3}{3}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^n} = e^a.$$

Reste à prouver que la limite du premier facteur est 1.

$$\frac{e^{\frac{n}{4}}}{n^{\frac{n+1}{2}}}\sqrt[n]{1^1 2^2 3^3 \ldots n^n} = e^{\frac{n}{4}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\cdots\left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{n}{n}}$$

$$= e^{n\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\log\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\log\frac{n}{n}\right)\right]}.$$

On remarque que

$$\int_0^1 x\log x\,dx = \left|\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

et l'exposant devient

$$n\left[\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\log\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\log\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}-\int_0^1 x\log x\,dx\right]$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{n} n\int_{\frac{\lambda-1}{n}}^{\frac{\lambda}{n}}\left(\frac{\lambda}{n}\log\frac{\lambda}{n}-x\log x\right)dx.$$

I. $\lambda = 1$.

$$n\int_0^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}-x\log x\right)dx = \frac{1}{2n}\log\frac{1}{n}+\frac{1}{4n}.$$

II. $\lambda = 2, 3, \ldots, n$.

$$x\log x = \frac{\lambda}{n}\log\frac{\lambda}{n}+\left(x-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1+\log\frac{\lambda}{n}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\lambda}{n}\right)^2\frac{1}{\frac{\lambda}{n}+\theta\left(x-\frac{\lambda}{n}\right)}.$$

$$(0<\theta<1).$$

Quand x est resserré dans l'intervalle $\left(\frac{\lambda-1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right)$

$$\frac{1}{\frac{\lambda}{n}+\theta\left(x-\frac{\lambda}{n}\right)} < \frac{n}{\lambda-1} \qquad (\lambda>1).$$

En intégrant

$$\sum_{\lambda=1}^{n} n \int_{\frac{\lambda-1}{n}}^{\frac{\lambda}{n}} \left(\frac{\lambda}{n}\log\frac{\lambda}{n} - x\log x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2n}\log\frac{1}{n} + \frac{1}{4n} + \sum_{\lambda=2}^{n} n\left[\frac{1}{2n^2}\left(1+\log\frac{\lambda}{n}\right) - \frac{\theta'}{6n^3}\frac{n}{\lambda-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\log\frac{\lambda}{n}\right) - \frac{\theta''\sum\limits_{\lambda=1}^{n=1}\frac{1}{\lambda}}{6n} - \frac{1}{4n}$$

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}}{n} < \frac{1+\log(n-1)}{n}$$

devient nul pour n infini; nous n'avons qu'à chercher la limite de

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n}\left(1+\log\frac{\lambda}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1+\log\frac{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}{n}\right).$$

Mais d'après la formule de Stirling

$$\lim \frac{1.2.3\ldots n}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi},$$

$$\lim \frac{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}{n\, e^{-1} n^{\frac{1}{2n}}} = 1, \qquad \lim \log\frac{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}{n} = -1.$$

En rapprochant les extrêmes

$$\lim \frac{e^{\frac{n}{4}}}{n^{\frac{n+1}{2}}}\sqrt[n]{1^1 2^2 3^3\ldots n^n} = \lim e^{\frac{1}{2}\left(1+\log\frac{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}{n}\right)} = 1.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — En supposant $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ continus, il est aisé de remarquer l'égalité

$$\lim_{n=\infty} n\left\{\left[f\left(\frac{b-a}{n}+a\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+f\left(2\frac{b-a}{n}+a\right)+\ldots+f(b)\right]\frac{b-a}{n}-\int_a^b f(x)\,dx\right\}$$
$$=\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,dx.$$

Dans la démonstration précédente on était obligé d'établir la même égalité par un calcul plus détaillé, parce que ces conditions simples manquaient d'être remplies.

Autre démonstration (1). — Soit $f(x)$ une fonction telle que $f'''(x)$ converge vers zéro pour x infini, conservant le même signe, toujours diminuant en valeur absolue.

$$\int_0^x f(x)\,dx = \mathrm{F}(x),$$

$$\mathrm{F}\left(n-\frac{1}{2}\right) = \mathrm{F}(n) - \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2!\,2^2}f'(n)$$
$$-\frac{1}{3!\,2^3}f''(n) + \frac{1}{4!\,2^4}f'''\left(n-\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\mathrm{F}\left(n-\frac{1}{2}\right) = \mathrm{F}(n-1) + \frac{1}{2}f(n-1) + \frac{1}{2!\,2^2}f'(n-1)$$
$$+\frac{1}{3!\,2^3}f''(n-1) + \frac{1}{4!\,2^4}f'''\left(n-1+\frac{\theta'}{2}\right).$$

$$\mathrm{F}(n) - \mathrm{F}(n-1) - \frac{1}{2}[f(n-1)+f(n)]$$
$$+\frac{1}{2!\,2^2}[f'(n)-f'(n-1)] - \frac{1}{3!\,2^3}[f''(n-1)+f''(n)]$$
$$=\frac{1}{4!\,2^4}\left[f'''\left(n-1+\frac{\theta'}{2}\right) - f'''\left(n-\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

---

(1) *Voir* Cesaro, ***Lehrb. d. alg. Analysis*** (p. 273), d'où nous avons empruntée la méthode suivie.

Faisons $n = 2, 3, \ldots, n$.

$$\begin{aligned}F(n) - F(1) - \left[\frac{1}{2}f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n)\right] \\ + \frac{1}{2!\,2^2}[f'(n) - f'(1)] - \frac{1}{3!\,2^2}\left[\frac{1}{2}f''(1) + f''(2) + \ldots \right. \\ \left. + f''(n-1) + \frac{1}{2}f''(n)\right] \\ = \frac{1}{4!\,2^4}\left[f'''\left(1 + \frac{\theta'}{2}\right) - f'''\left(2 - \frac{\theta''}{2}\right)\right. \\ \left. + f'''\left(2 + \frac{\theta'''}{2}\right) - \ldots - f'''\left(n - \frac{\theta}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

La série à droite converge, ayant des termes à signes alternés et décroissants sans limite; c'est-à-dire, l'expression à gauche a une limite finie et déterminée pour n infini. Posons

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}, \qquad f(x) = x\log x,$$

$$f'(x) = 1 + \log x, \qquad f''(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

En appliquant le résultat obtenu, il est facile de montrer que

$$\frac{\dfrac{n^2}{2}\log n - \dfrac{n^2}{4} - \left[1\log 1 + 2\log 2 + 3\log 3 + \ldots + (n-1)\log(n-1) + \dfrac{1}{2}n\log n\right]}{n}$$

tend vers zéro pour n infini. C. Q. F. D.

1580.

(1888, p. 112.)

Si dans la question précédente, on fait

$$b_n = \frac{2}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

on a

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{b_1 b_2^2 b_3^3 \ldots b_n^n} = e^{2a+1}.$$

E. Cesaro.

SOLUTION,

Par M. G. Polya.

On fait

$$a_1 = 1 + r_1, \qquad a_2 = 2 + r_2, \qquad \ldots, \qquad a_n = n + r_n,$$

$$b_1 = \frac{2}{1}(1 + r_1), \qquad b_2 = \frac{2}{2}(1 + 2 + r_1 + r_2) \qquad \ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{n}(1 + 2 + \ldots + n + r_1 + r_2 + \ldots + r_n),$$

$$b_1 = 1 + 1 + 2r_1, \qquad b_2 = 2 + 1 + 2\,\frac{r_1 + r_2}{n},$$

$$b_n = n + 1 + 2\,\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n}.$$

Comme dans la question précédente

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{b_1 b_2^2 b_3^3 \ldots b_n^n}$$

$$= \lim \frac{e^{\frac{n}{4}}}{n^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt[n]{1^1 2^2 3^3 \ldots n^n}$$

$$\times \lim \sqrt[n]{(1 + 1 + 2r_1)\ldots\left(1 + \frac{1 + 2\,\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n}}{n}\right)^n}$$

$$= 1 \times e^{1+2a}.$$

1661.

(1894, p. 1.)

Démontrer que, si le rapport d'un terme au terme précédent dans la succession $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tend vers une limite finie et déterminée k, on a, pour n croissant à l'infini,

$$\lim \sqrt[n]{a_1^{u_n} a_2^{u_{n-1}} a_3^{u_{n-2}} \ldots a_n^{u_1}} = k^s,$$

$u_1, u_2, u_3, \ldots$ étant les termes d'une série convergente quelconque dont la somme est 1.

SOLUTION,

Par M. G. Polya.

Posons

$$\log a_1 = \alpha_1, \qquad \log a_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \log a_n = \alpha_n, \qquad \ldots.$$
$$\lim \alpha_n = \log k.$$

Le logarithme de l'expression donnée est

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n-1} + \alpha_3 u_{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} u_2 + \alpha_n u_1}{n} \\
&= \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) u_n + (\alpha_2 - \alpha_3)(u_n + u_{n-1}) + \ldots}{n} \\
&\quad + \frac{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)(u_2 + u_3 + \ldots + u_n)}{n} \\
&\quad + \frac{\alpha_n (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)}{n}.
\end{aligned}$$

Le second membre converge vers

$$\begin{aligned}
&\lim \frac{\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - \alpha_{n-1}}{n} (u_1 + \ldots + u_n) \\
&= \lim \frac{\alpha_n - \alpha_1}{n} \lim (u_1 + \ldots + u_n) \\
&= s \log k.
\end{aligned}$$

Je dis que le premier converge vers 0; soit :

$A \geqq |\alpha_i - \alpha_{i-1}|$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots,$
$S \geqq |u_{i+1} + u_{i+2} + \ldots + u_k| = |s_k - s_i|$ pour $i, k = 1, 2, 3, 4, \ldots,$
N un nombre entier choisi de manière que

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_\nu| \leqq \frac{\varepsilon}{2A}$$

pour μ, $\nu = N + 1, N + 2, N + 3, \ldots$; tous les trois nombres existent, par hypothèse. Le premier membre est donc plus petit que

$$\frac{(N-1)AS}{n} + \frac{A(n-N)}{n} \frac{\varepsilon}{2A}$$

pour tous les $n = N + 1$, $N + 2$, $\ldots$; alors on prendra n si grand qu'on ait

$$\frac{(\mathrm{N}-1)\,\mathrm{AS}}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$