Nouvelles annales de mathématiques

G. Fontené

Semi-invariants d'un polynôme

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 337-340

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__337_0>

[B4b]

SEMI-INVARIANTS D'UN POLYNOME;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. On appelle *semi-invariants d'un polygone* X les fonctions entières des coefficients qui ne sont pas altérées par la substitution $y = x + h$, ou encore qui dépendent seulement des différences des racines, de la forme de la figure formée par les points-racines. Pour un polynome de degré m, le nombre des semi-invariants distincts est m, en comptant comme semi-invariant le coefficient de x^m.

On peut former comme il suit un système complet de semi-invariants. Soit

$$X_m = ax^m + \frac{m}{1} b x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} c x^{m-2} + \ldots;$$

les quotients des dérivées par m, $m(m-1)$, ... sont

$$X_{m-1} = ax^{m-1} + \frac{(m-1)}{1} b x^{m-2}$$
$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} c x^{m-3} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$X_2 = ax^2 + 2bx + c,$$
$$X_1 = ax + b,$$
$$X_0 = a.$$

Si l'on pose

$$U = ax + b,$$

d'où

$$x = \frac{-b}{a} + \frac{U}{a},$$

le polynome X_m se transforme en un polynome en U donné par la formule de Taylor, savoir

$$X_m\left(\frac{-b}{a}\right)+\frac{m}{1}\frac{U}{a}X_{m-1}\left(\frac{-b}{a}\right)+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1\ldots3)}{1.2\ldots(m-2)}\frac{U^{m-2}}{a^{m-2}}X_2\left(\frac{-b}{a}\right)+\frac{U^m}{a^m}\times a,$$

sans terme en U^{m-1}; on a donc, en multipliant par a^{m-1},

$$a^{m-1}X_m = U^m + \frac{m(m-1)}{1.2}\gamma U^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\delta U^{m-3}+\ldots,$$

γ, δ, ... étant les expressions qu'on obtient en remplaçant x par $\frac{-b}{a}$ dans les polynomes

$$ax^2+2bx+c,$$
$$ax^3+3bx^2+3cx+d,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en multipliant les résultats par a, a^2, ...; on a ainsi

$$\gamma = (b^2-2b^2)+a.c,$$
$$\delta = (-b^3+3b^3)-3ab.c+a^2.d,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou, en mettant a en tête de la suite,

$$a,$$
$$\gamma = a.c-b^2,$$
$$\delta = a^2.d-3ab.c+2b^3,$$
$$\varepsilon = a^3.e-4a^2b.d+6ab^2.c-3b^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or $\frac{U}{a}$ est l'excès de x sur la moyenne arithmétique $\frac{-b}{a}$ des racines du polynome X; quand on fait la substitution $y = x + h$, la moyenne arithmétique des racines du polynome en y est $\frac{-b}{a} + h$, et l'excès de y ou $x + h$ sur cette moyenne est encore $\frac{U}{a}$. *Il suit de là que $\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ forment un système de semi-invariants, qui sont d'ailleurs distincts et en nombre m.*

2. Tout invariant relatif à une valeur de m s'exprime en fonction des semi-invariants correspondants, et devient un semi-invariant pour les valeurs plus élevées de m. On a, pour $m = 4$, les invariants

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3;$$

si on les prend sur le polynome en U, qui n'a pas de terme en U^3, on a

$$a^2 S = \varepsilon + 3\gamma^2,$$
$$a^3 T = \gamma\varepsilon - \delta^2 - \gamma^3;$$

pour la première formule, par exemple, comme on a remplacé x par $\frac{U - b}{a}$, S a été divisé par a^4, mais on a multiplié ensuite chaque coefficient par a^3, de sorte que S a été multiplié par a^2. On pourra donc, à partir de $m = 4$, employer un système de semi-invariants comprenant

$$\alpha, \quad \gamma, \quad \delta, \quad (S, T);$$

bien entendu, ces cinq quantités sont liées par une relation qu'on obtient en éliminant ε entre les deux formules ci-dessus : cette relation est

$$a^2(\gamma S - a T) = 4\gamma^3 + \delta^2.$$

Pour $m = 4$, le polynome en U peut s'écrire

$$U^4 + 6\gamma U^2 + 4\delta U + (a^2 S - 3\gamma^2).$$

3. Je me propose d'appliquer les semi-invariants à la discussion des équations de degré 2, 3, 4, 5 au point de vue des racines multiples, et d'utiliser la transformation $U = ax + b$ pour la réduction de l'intégrale $\int \frac{1}{X^2} dx$, X étant un polynome du quatrième degré.