JEAN SERVAIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1911

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 314-328

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__314_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1911.

Composition de Géométrie analytique et mécanique ;

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

On donne trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz.

1° *Trouver les équations de la parabole* (P) *qui satisfait aux conditions suivantes : son foyer a pour coordonnées* $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; *son axe est parallèle à* Oy; *elle passe par* O; *enfin elle tourne sa concavité vers les* y *positifs.*

2° *Montrer qu'à chaque point* M *de l'espace correspond, en général, un point* R *de l'axe* Oz *et un seul, autre que* O, *tel que la droite* MR *rencontre* (P). *Calculer* OR *en fonction des coordonnées de* M.

3° *Parmi les droites* MR *ainsi définies, on considère celles qui sont parallèles au plan* $z = lx$. *Trouver et étudier leur lieu géométrique.*

4° *On imagine que* M *soit la position d'un point matériel libre de masse égale à l'unité et que le vecteur* MR *représente la force unique qui agit sur lui.*

Que peut-on dire du mouvement projeté sur le plan xOy?

Que peut on dire du mouvement lui-même quand la vitesse initiale de M *est dans le plan* MOz?

5° *Faire l'étude complète du mouvement avec les conditions initiales suivantes :*

Coordonnées du point M : $x_0 = -2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$;

Projections de sa vitesse : $x'_0 = 0$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = 3$.

1. La parabole (P) est située dans le plan xOy. Son équation dans ce plan est

$$(x-1)^2 + y^2 = (y+1)^2$$

ou

$$x^2 - 2x - 2y = 0. \tag{1}$$

2. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point M de l'espace, z_2 la cote OR du point R.

Les équations de la droite MR sont

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}. \tag{2}$$

Elle coupe le plan xOy au point de coordonnées

$$x = \frac{-x_1 z_2}{z_1 - z_2}, \qquad y = \frac{-y_1 z_2}{z_1 - z_2}, \qquad z = 0.$$

Exprimons que ce point est situé sur la parabole (P) et nous avons

$$\frac{z_2}{z_1 - z_2}\left(\frac{x_1^2 z_2}{z_1 - z_2} + 2x_1 + 2y_1\right) = 0.$$

En supprimant la solution $z_2 = 0$, il reste

$$(x_1^2 - 2x_1 - 2y_1) z_2 + 2z_1(x_1 + y_1) = 0,$$

ce qui donne pour le segment OR

$$z_2 = -\frac{2z_1(x_1 + y_1)}{x_1^2 - 2x_1 - 2y_1}.$$

3. Remplaçons z_2 par sa valeur dans les équations (2)

de la droite MR et il vient

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z(x_1^2 - 2x_1 - 2y_1) + 2z_1(x_1 + y_1)}{z_1 x_1^2}.$$

Exprimons que cette droite est parallèle au plan

$$z = lx.$$

La parallèle menée par l'origine à la droite MR a pour équations

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z(x_1^2 - 2x_1 - 2y_1)}{z_1 x_1^2},$$

on doit donc avoir

$$l = \frac{z_1 x_1}{x_1^2 - 2x_1 - 2y_1},$$

ou

$$x_1(z_1 - lx_1) + 2l(x_1 + y_1) = 0.$$

Comme le point M est un point *quelconque* de la droite MR, l'équation précédente, où l'on considère x_1, y_1, z_1, comme des coordonnées courantes, est l'équation du lieu. C'est un paraboloïde hyperbolique dont les plans directeurs sont

$$x = 0, \qquad z = lx$$

qui passe par Oz et par la parabole (P).

4. Si M est un point matériel de masse 1 soumis à la force

$$F = \overline{MR},$$

son mouvement projeté sur xOy est celui d'un point soumis à une force centrale proportionnelle à la distance, car

$$X = -x, \qquad Y = -y.$$

Si la vitesse est quelconque, la projection de la trajectoire sur le plan xOy est une ellipse de centre O.

Si la vitesse initiale est située dans le plan MOz, sa projection sur le plan xOy passe par O et la trajectoire se projette suivant une droite passant par O. Le mouvement dans l'espace s'effectue *dans le plan* MOz. Mais alors le point où la droite MR rencontre la parabole est un point fixe, intersection (autre que O) du plan MOz avec la parabole.

La force $\overline{MR}$ est donc centrale et le mouvement suit la loi des aires.

5. Si les conditions initiales sont :

Coordonnées de M :

$$x_0 = -2, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = 0,$$

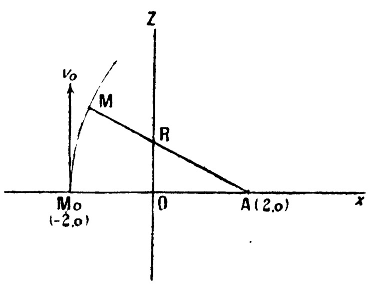
Projections de la vitesse :

$$x'_0 = 0, \qquad y'_0 = 0, \qquad z'_0 = 3,$$

le mouvement a lieu dans le plan xOz.

La droite MR rencontre la parabole (P) au point A, de coordonnées $x = 2$, $z = 0$, situé sur Ox.

Fig. 1.



Soient x, z les coordonnées de M, l'équation de la droite MA (*fig.* 1) est

$$\frac{X-2}{x-2} = \frac{Z}{z}.$$

La cote $\overline{OR}$ du point R est donc

$$X = 0, \qquad Z = \frac{-2z}{x-2}.$$

Les équations du mouvement du point M dans le plan xOz sont donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -z - \frac{2z}{x-2} = \frac{-zx}{x-2}.$$

En tenant compte des conditions initiales, la première équation donne

$$x = -2\cos t.$$

Formons la combinaison des aires qui donne

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - (x-2)\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

ou

$$z\frac{dx}{dt} - (x-2)\frac{dz}{dt} = 12,$$

en intégrant et tenant compte des conditions initiales. On a alors, en remplaçant x par $-2\cos t$, l'équation suivante pour déterminer z :

$$(1+\cos t)\frac{dz}{dt} + z\sin t = 6.$$

L'intégrale de cette équation linéaire privée de second membre est

$$z = A(1+\cos t).$$

Posons

$$z = u(1+\cos t);$$

on a, pour déterminer u, l'équation

$$\frac{du}{dt}(1+\cos t)^2 = 6,$$

d'où

$$u = \int \frac{6\,dt}{(1+\cos t)^2} + C,$$

$$u = 3 \operatorname{tang} \frac{t}{2} + \operatorname{tang}^3 \frac{t}{2} + C;$$

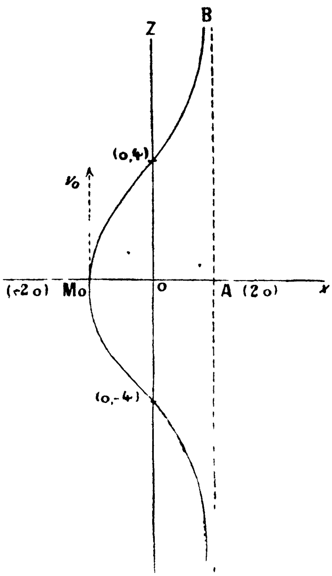
on en tire

$$z = \left[3 \operatorname{tang} \frac{t}{2} + \operatorname{tang}^3 \frac{t}{2} + C\right] 2 \cos^2 \frac{t}{2}.$$

En vertu des conditions initiales, $C = 0$ et, par suite,

$$z = 3 \sin t + 2 \sin^2 \frac{t}{2} \operatorname{tang} \frac{t}{2}.$$

Fig. 2.



Le mouvement est donc défini par les équations

$$x = -2 \cos t,$$

$$z = \sin t \left[3 + \operatorname{tang}^2 \frac{t}{2}\right].$$

La trajectoire est, en posant $\tang \frac{t}{2} = \theta$, la cubique unicursale

$$x = 2\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1},$$

$$z = \frac{2\theta(\theta^2 + 3)}{\theta^2 + 1},$$

représentée par la figure 2. Le mobile part de M_0 et décrit la branche *infinie* M_0B en un temps *fini* $t = \pi$.

Composition d'Algèbre et Trigonométrie ;

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

On donne l'équation différentielle

$$(1) \qquad a\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - by = 0,$$

où a et b désignent deux constantes réelles.

I. *Trouver une série entière* $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots$ *qui vérifie l'équation* (1) *et s'assurer qu'elle est convergente.*

II. *Constater :*

1° *Que les coefficients* λ_0 *et* λ_1, *demeurent arbitraires ;*

2° *Que la série peut s'écrire*

$$\lambda_0\varphi(x, a, b) + \lambda_1\psi(x, a, b);$$

φ et ψ *désignant deux séries entières en x dont les coefficients sont des fonctions de a et b ;*

3° *Que ces fonctions satisfont à l'équation* (1);

4° *Que leurs dérivées* φ'_x et ψ'_x *satisfont chacune à une équation de même forme.*

III. *Exprimer* $\varphi'(x, a, b)$ *et* $\psi'(x, a, b)$ *en fonction de* $\varphi(x, a, b-1)$ *et* $\psi(x, a, b-1)$.

IV. *Quand* b *est entier positif, suivant qu'il est pair ou impair, la série* φ *ou* ψ *devient un polynome.*

V. *Discuter, d'après le signe de* a, *la réalité des racines de ces polynomes* φ *ou* ψ *suivant la parité de* b.

Soit

$$\begin{aligned} y = {} & \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots \\ & + \lambda_m x^m + \lambda_{m+1} x^{m+1} + \lambda_{m+2} x^{m+2} + \ldots, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = {} & \lambda_1 + 2\lambda_2 x + 3\lambda_3 x^2 + \ldots \\ & + m\lambda_m x^{m-1} + (m+1)\lambda_{m+1} x^m + (m+2)\lambda_{m+2} x^{m+1} + \ldots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} = {} & 2\lambda_2 + 2.3\lambda_3 x + \ldots + m(m-1)\lambda_m x^{m-2} \\ & + m(m+1)\lambda_{m+1} x^{m-1} + (m+1)(m+2)\lambda_{m+2} x^m + \ldots. \end{aligned}$$

Formons l'expression

$$a\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + by$$

et écrivons qu'elle est identiquement nulle en égalant à zéro le terme constant, le coefficient de x, etc., celui de x^m.

Nous obtenons les égalités

$$\begin{gathered} b\lambda_0 + 2a\lambda_2 = 0, \\ (b-1)\lambda_1 + 2.3a\lambda_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (b-m)\lambda_m + (m+1)(m+2)a\lambda_{m+2} = 0; \end{gathered}$$

on en tire

$$\lambda_2 = -\frac{b}{2a}\lambda_0.$$

$$\lambda_4 = \frac{2-b}{3.4a}\lambda_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda_{2p} = \frac{2p-2-b}{(2p-1)2pa}\lambda_{2p-2}.$$

Ce qui donne, en multipliant membres à membres,

$$(1)\qquad \lambda_{2p} = \frac{(-b)(2-b)(4-b)\ldots(2p-2-b)}{(2p)!\,a^p}\lambda_0.$$

De même on a

$$\lambda_3 = \frac{1-b}{2.3a}\lambda_1,$$

$$\lambda_5 = \frac{3-b}{4.5a}\lambda_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda_{2p+1} = \frac{2p-1-b}{2p(2p+1)a}\lambda_{2p-1}.$$

D'où l'on déduit

$$(2)\qquad \lambda_{2p+1} = \frac{(1-b)(3-b)\ldots(2p-1-b)}{(2p+1)!\,a^p}\lambda_1.$$

Les formules (1) et (2) donnent ainsi les coefficients de la série y vérifiant *formellement* l'équation différentielle proposée, quels que soient λ_0 et λ_1.

La série peut se mettre sous la forme

$$\lambda_0\,\varphi(x, a, b) + \lambda_1\,\psi(x, a, b),$$

en posant

$$(3)\quad \varphi(x, a, b) = 1 + \frac{-b}{2!\,a}x^2 + \frac{(-b)(2-b)}{4!\,a^2}x^4 + \ldots + \frac{(-b)(2-b)\ldots(2p-2-b)}{(2p)!\,a^p}x^{2p} + \ldots$$

et

$$(4)\quad \psi(x, a, b) = x + \frac{1-b}{3!\,a}x^3 + \frac{(1-b)(3-b)}{5!\,a^2}x^5 + \ldots + \frac{(1-b)(3-b)\ldots(2p-1-b)}{(2p+1)!\,a^p}x^{2p+1} + \ldots.$$

Or ces deux séries sont toutes deux convergentes quels que soient a, b et x car, dans ces deux séries, les rapports d'un terme au précédent sont respectivement

$$\frac{2p-2-b}{(2p-1)2pa}x^2 \quad \text{et} \quad \frac{2p-1-b}{2p(2p+1)a}x^2$$

qui tendent tous deux vers zéro quand p croît indéfiniment.

Chacune de ces séries partielles étant convergente la série totale l'est aussi et l'on peut poser

$$y = \lambda_0\,\varphi(x, a, b) + \lambda_1\,\psi(x, a, b),$$

φ et ψ étant deux fonctions définies par les égalités (3) et (4).

Il est clair que ces fonctions φ et ψ vérifient séparément l'équation proposée, car φ est la solution particulière obtenue en faisant $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_1 = 0$, tandis que ψ est celle qu'on obtient pour $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 = 1$.

φ et ψ étant représentées par des séries entières, leurs dérivées sont obtenues en dérivant ces séries termes à termes, on a donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{b}{a}x + \frac{(-b)(2-b)}{3!\,a^2}x^3 + \dots + \frac{(-b)(2-b)\dots(2p-2-b)}{(2p-1)!\,a^p}x^{2p-1} + \dots$$

et

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 1 + \frac{1-b}{2!\,a}x^2 + \frac{(1-b)(3-b)}{4!\,a^2}x^4 + \dots + \frac{(1-b)(3-b)\dots(2p-1-b)}{(2p)!\,a^p}x^{2p} + \dots.$$

On voit immédiatement qu'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{b}{a}\psi(x, a, b-1)$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \varphi(x, a, b-1).$$

On en conclut que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ sont des solutions particulières de l'équation déduite de la proposée en changeant b en $b-1$

$$a\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (b-1)y = 0,$$

ce qu'on pourrait d'ailleurs vérifier directement.

Lorsque b est un nombre entier pair, $b = 2p$, tous les termes de la série (3) qui donne $\varphi(x, a, b)$ sont nuls à partir du terme en x^{2p+2}. Dans ce cas φ est un polynome de degré $2p$.

De même si b est un entier impair, $b = 2p+1$, le développement de $\psi(x, a, b)$ est limité et ψ est un polynome de degré $2p+1$.

On a

$$\varphi(x, a, 2p) = 1 + \frac{-2p}{2!\,a}x^2 + (-1)^2\frac{(2p-2)2p}{4!\,a^2}x^4 + \ldots$$
$$+ (-1)^p\frac{2p(2p-2)\ldots 4.2}{(2p)!\,a^p}x^{2p}$$

et

$$\psi(x, a, 2p+1) = x + (-1)\frac{2p}{3!\,a}x^3 + (-1)^2\frac{(2p-2)2p}{5!\,a^2}x^5 + \ldots$$
$$+ (-1)^p\frac{2p(2p-2)\ldots 4.2}{(2p+1)!\,a^p}x^{2p+1}.$$

On voit immédiatement que lorsque a est négatif tous les coefficients des polynomes $\varphi(x, a, 2p)$ et $\psi(x, a, 2p+1)$ sont positifs.

Par suite toutes les racines de l'équation

$$\varphi(x, a, 2p) = 0$$

sont imaginaires, et l'équation

$$\psi(x, a, 2p+1) = 0$$

n'a qu'une seule racine réelle : $x = 0$.

Examinons alors le cas où a est positif.

Comme on a

$$\varphi'(x, a, 2p) = -\frac{2p}{a}\psi(x, a, 2p-1)$$

et

$$\psi'(x, a, 2p+1) = \varphi(x, a, 2p),$$

si l'on considère la suite des équations entières

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x, a, 2) & = 0, \\ \psi(x, a, 3) & = 0, \\ \varphi(x, a, 4) & = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & , \\ \varphi(x, a, 2p-2) & = 0, \\ \psi(x, a, 2p-1) & = 0, \\ \varphi(x, a, 2p) & = 0, \\ \psi(x, a, 2p+1) & = 0, \end{array} \right.$$

les racines réelles de chacune d'elles *séparent* les racines de la suivante, en vertu du théorème de Rolle. Or, d'après ce qui précède on a

$$\varphi''(x, a, 2p) = -\frac{2p}{a}\psi'(x, a, 2p-1) = -\frac{2p}{a}\varphi(x, a, 2p-2)$$

et

$$\psi''(x, a, 2p+1) = \varphi'(x, a, 2p) = -\frac{2p}{a}\psi(x, a, 2p-1),$$

comme d'ailleurs φ et ψ sont des intégrales de l'équation proposée

$$a\varphi'' - x\varphi' + 2p\varphi = 0,$$
$$a\psi'' - x\psi' + (2p+1)\psi = 0,$$

on en conclut qu'on a *identiquement*

$$\varphi(x, a, 2p) + \frac{x}{a}\psi(x, a, 2p-1) - \varphi(x, a, 2p-2) = 0$$

et

$$(2p+1)\psi(x, a, 2p+1) \\ - x\varphi(x, a, 2p) - 2p\psi(x, a, 2p-1) = 0.$$

Ces deux dernières identités prouvent que pour toute valeur de x qui annule $\psi(x, a, 2p-1)$ les deux polynomes $\varphi(x, a, 2p)$ et $\varphi(x, a, 2p-2)$ prennent la *même* valeur numérique, et que pour toute valeur de x qui annule $\varphi(x, a, 2p)$ les deux polynomes $\psi(x, a, 2p+1)$ et $\psi(x, a, 2p-1)$ prennent des valeurs numériques de même signe.

En d'autres termes *pour toute valeur de x qui annule l'un des polynomes de la suite* (S) *les deux polynomes qui le comprennent prennent des valeurs numériques de même signe.*

Il en résulte que, *lorsque $a > 0$, chacune des équations* (S) *a toutes ses racines réelles et distinctes.*

Il suffit de prouver que si cette proposition est vraie pour une des équations (S) elle est vraie pour la suivante.

Supposons que l'équation

$$\psi(x, a, 2p-1) = 0$$

ait toutes ses racines réelles et distinctes.

Soient α et β deux racines consécutives.

Entre ces deux racines il y a, d'après le théorème de Rolle, une racine et une seule de l'équation dérivée

$$\varphi(x, a, 2p-2) = 0;$$

on a donc

$$\varphi(\alpha, a, 2p-2)\varphi(\beta, a, 2p-2) < 0,$$

mais, comme d'après la remarque précédente

$$\varphi(\alpha, a, 2p-2) = \varphi(\alpha, a, 2p)$$

et

$$\varphi(\beta, b, 2p-2) = \varphi(\beta, b, 2p),$$

on en conclut aussi que

$$\varphi(\alpha, a, 2p)\varphi(\beta, a, 2p) < 0.$$

Par suite, entre deux racines consécutives quelconques α et β de l'équation

$$\psi(x, a, 2p-1) = 0,$$

il y aura au moins une racine réelle de l'équation suivante

$$\varphi(x, a, 2p) = 0.$$

Si donc la première a toutes ses racines réelles, il en est de même de la seconde. Or, les deux premières équations de la suite (S)

$$\varphi(x, a, 2) = 0,$$
$$\psi(x, a, 3) = 0$$

ont manifestement leurs racines réelles et distinctes quand $a > o$.

Il en est donc de même des suivantes.

On peut remarquer que les équations de la suite (S) ne dépendent que de $\frac{x}{\sqrt{a}}$. Si donc on pose

$$x = \sqrt{a}.z,$$

on obtiendra des équations en z à coefficients *numériques* et ayant d'ailleurs toutes leurs racines réelles. On en conclut que lorsque a est négatif les racines des équations (S) sont imaginaires pures, de la forme ik.

Composition de calcul numérique.

Application de la règle à calcul à la fonction $y = \frac{x}{\sin x}$, *où* x *représente le rapport de l'arc au rayon.*

1° *Dresser une table de la fonction en faisant croître* x *de* 0 *à* 100 *grades par échelons de* 10 *grades.*

2° *Fournir un moyen d'étendre l'usage de la table en dehors de ses limites et calculer la table auxiliaire nécessaire à cet effet.*

3° *Application : Calculer* y *pour un arc de* 542 *grades, au moyen des deux tables construites.*