NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

É. TURRIÈRE

Sur un complexe quadratique dont tous les cônes sont de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 308-313

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__308_0>

[N¹1f]

SUR UN COMPLEXE QUADRATIQUE DONT TOUS LES CÔNES SONT DE RÉVOLUTION;

Par M. É. TURRIÈRE.

1. Dans mon article intitulé *Une application du théorème de Malus au problème de Transon* (*Nouvelles Annales*, 1911, p. 160), j'ai considéré un complexe de droites (C) tel que tout cône du complexe admette un axe de symétrie binaire, ou plusieurs axes de cette nature. Si le complexe (C) est le complexe linéaire, tout cône du complexe admet un axe de symétrie perpendiculaire au plan focal au foyer correspondant et une infinité d'autres axes qui sont des rayons du complexe (C) lui-même.

Ce cas singulier n'est pas le seul pour lequel tout cône admet une infinité d'axes de symétrie. Soit en effet le complexe quadratique (C) d'équation

$$\begin{aligned}(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 + a_5 p_5 + a_6 p_6)^2 \\ = a^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),\end{aligned}$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a$ désignant sept constantes arbitraires. Tout cône de ce complexe de sommet M est bitangent au cône isotrope de même sommet le long des deux génératrices situées dans le plan focal de M par rapport au complexe linéaire (Γ) d'équation

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 + a_5 p_5 + a_6 p_6 = 0;$$

en d'autres termes, *tout cône du complexe* (C) *est de* *révolution;* l'axe de révolution est la perpendiculaire en M au plan focal de ce point par rapport au complexe linéaire (Γ). En se reportant donc à l'article précédemment cité, on voit qu'on peut associer au complexe (C) deux complexes (C′) : l'un d'eux n'est autre que le complexe linéaire (Γ) et l'autre est le complexe quadratique constitué par les perpendiculaires aux plans focaux de (Γ) aux foyers correspondants.

Il suffit donc de connaître une solution du problème de Transon relatif au complexe (C) précédent pour pouvoir considérer ce problème comme étant résolu.

Cette propriété découle d'ailleurs d'autres remarques; avant de les indiquer et de former la solution la plus générale, il convient de réduire l'équation du complexe (C) à la forme la plus simple. A cet effet, il suffit, par un changement d'axes, de prendre pour axe Oz l'axe du complexe linéaire (Γ) associé au complexe (C). L'équation de (C) prend alors la forme

$$(p_6 + Kp_3)^2 = a^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2);$$

la constante K est nulle si le complexe (Γ) est spécial, c'est-à-dire si l'expression

$$a_1 a_4 + a_2 a_5 - a_3 a_6$$

est nulle.

2. Le complexe (C), tout comme le complexe linéaire (Γ) auquel il se réduit lorsque la constante a est nulle, est invariant dans la translation infinitésimale parallèle à l'axe Oz et dans la rotation infinitésimale autour du même axe. L'équation des surfaces dont les normales appartiennent au complexe (C) admet donc trois transformations infinitésimales distinctes : l'une est la transformation caractéristique, d'après Lie, des équations de cette nature : la dilatation infinitésimale; les deux

autres sont celles qui correspondent aux deux déplacements infinitésimaux précédents.

Dans ces conditions, puisque la connaissance de deux transformations infinitésimales est suffisante pour déduire la solution générale d'une solution particulière unique, nous nous trouvons en présence d'un nombre surabondant de transformations infinitésimales. Pour engendrer la trajectoire la plus générale du complexe (C), il suffit donc de prendre l'enveloppe d'une famille de surfaces prises arbitrairement parmi les parallèles aux surfaces déduites, par un déplacement hélicoïdal infinitésimal, d'axe Oz et de pas arbitraire, d'une trajectoire particulière.

Comme solution particulière, on pourra envisager la surface (S) qui va être considérée plus loin.

3. En se reportant au Chapitre de ma Thèse ([1]) relatif aux complexes de translation ou de révolution, on voit qu'il convient d'utiliser les coordonnées géographiques pour déterminer le plus simplement possible les surfaces trajectoires du complexe (C). Considérée comme enveloppe d'un plan d'équation

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi,$$

la trajectoire générale est intégrale de l'équation du premier ordre ([2])

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\psi} + K \sin\varphi = a;$$

([1]) *Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné* (Paris, 1911, et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*).

([2]) D'une façon précise, le complexe quadratique (C) se décompose en deux complexes *semi-linéaires* (*Cf.* le Chapitre corresconformément à la théorie générale, celle-ci s'intègre immédiatement et l'intégrale générale est

$$\varpi = (a - \mathrm{K}\sin\varphi)\,\psi + \Phi;$$

Φ désigne une fonction arbitraire d'intégration de la seule variable φ.

De cette expression générale résulte une génération géométrique simple de la surface trajectoire générale du complexe (C), faisant intervenir une surface de M. Appell particulière,

$$\varpi = \psi,$$

l'hélicoïde gauche à plan directeur

$$\varpi = \psi \sin\varphi$$

et une surface générale de révolution autour de Oz

$$\varpi = \Phi.$$

Pour solution particulière, on pourra donc prendre la surface (S) d'équation

$$\varpi = (a - \mathrm{K}\sin\varphi)\psi,$$

dont les lignes de courbure présentent la particularité intéressante d'admettre pour images sphériques des loxodromies : cette propriété résulte du fait que ϖ est une fonction linéaire de ψ et de $\psi\sin\varphi$ (1).

Parmi les surfaces trajectoires du complexe (C) les

---

pondant de ma Thèse) auxquels correspondent deux familles de surfaces trajectoires intégrales des équations

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\psi} + \mathrm{K}\sin\varphi = \pm a;$$

(1) *Cf.* mon article intitulé : *Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 21).

seules surfaces qui jouissent de cette propriété sont les surfaces qui correspondent à la fonction

$$\Phi = A \sin\varphi + B,$$

A et B étant deux constantes, c'est-à-dire les surfaces déduites de (S) par une translation parallèle à Oz. Pour les autres surfaces trajectoires des droites du complexe, les images sphériques des lignes de courbure ne sont pas des loxodromies, mais ces lignes de courbure sont immédiatement déterminables : leur équation différentielle est, en effet, indépendante de ψ.

L'équation différentielle des lignes de courbure, en coordonnées géographiques d'une surface quelconque, est (Cf. *Nouvelles Annales* de 1910, p. 21) de la forme

$$d\varphi^2 - \cos^2\varphi, \quad d\psi^2 + F(\varphi, \psi), \quad d\varphi\, d\psi = 0.$$

Si l'on suppose que F ne dépende que de φ, les surfaces correspondantes sont intégrales d'une équation aux dérivées partielles linéaires et du second ordre. Les surfaces trajectoires des droites du complexe (C) sont des intégrales particulières. L'interprétation géométrique de cette propriété est la suivante : *les images sphériques de toutes les lignes de courbure de chacun des systèmes se déduisent de l'une d'elles par rotation autour de* Oz.

4. Pour terminer, je ferai observer que l'équation aux dérivées partielles des mêmes surfaces trajectoires du complexe (C) est, en coordonnées ordinaires,

$$\frac{qx - py - K}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = a;$$

on reconnaît là une équation remarquable qui a été étudiée par M. Darboux (*Leçons sur les systèmes* *triple-orthogonaux*, p. 86) et considérée de nouveau par M. J. Haag dans sa Thèse (*Familles de Lamé, composées de surfaces égales*, p. 11; *Annales de l'École Normale supérieure*, 1910). M. Darboux a caractérisé les surfaces intégrales de cette équation par la propriété d'être superposables aux surfaces qui leur sont parallèles. M. Haag fait remarquer, en évitant toute intégration, que ces surfaces admettent deux hélicoïdes d'axe Oz et de pas K pour nappes de leur développée. De cette remarque M. Haag déduit une construction simple des congruences de normales de ces surfaces.

P. S. — La lecture des Mémoires de M. E. Keraval, *Sur les surfaces partiellement cylindroïdes*, m'avait amené à écrire un article *Sur les congruences de droites qui admettent un point pour surface centrale* (*Nouvelles Annales*, 1911, p. 165). Je dois ajouter que M. Haag, dans son Mémoire *Sur certains mouvements remarquables et leurs applications* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1910, p. 367), signale comme « très intéressante en elle-même » l'étude de la congruence des génératrices des quadriques de M. Humbert et indique plusieurs propriétés remarquables de cette congruence, celle de la surface centrale notamment.