Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 280-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__280_1>

CORRESPONDANCE.

M. E.-N. Barisien. — *Résolution d'équations au moyen d'identités.* — On peut appeler les équations de ce genre *équations-énigmes*, car elles seraient presque impossibles à résoudre sans la connaissance d'identités appropriées. En voici deux exemples intéressants :

I. *Résoudre l'équation du huitième degré*

$$(2x^2+a^2)^4+(2x^2-a^2)^4+(4ax)^4 \\ -(4x^4+12a^2x^2+a^4)^2=b^8.$$

On a l'identité

$$(2x^2+a^2)^4+(2x^2-a^2)^4+(4ax)^4 \\ =(4x^4+12a^2x^2+a^4)^2+(4x^4-12a^2x^2+a^4)^2,$$

de sorte que l'équation devient

$$(4x^4-12a^2x^2+a^4)^2=b^8$$

et se décompose en deux équations bicarrées

$$(4x^4-12a^2x^2+a^4-b^4)(4x^4-12a^2x^2+a^4+b^4)=0.$$

Et les huit racines sont

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{3a^2 \pm \sqrt{8a^4+b^4}}{2}},$$

$$\left.\begin{matrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{3a^2 \pm \sqrt{8a^4-b^4}}{2}}.$$

II. *Résoudre l'équation du huitième degré*

$$2(3x^2+a^2)^4-(3x^2+2ax-a^2)^4-(4ax)^4=b^8.$$

Or on a l'identité

$$\begin{aligned} &2(3x^2+a^2)^4 \\ &\quad=(3x^2+2ax-a^2)^4+(3x^2-2ax-a^2)^4+(4ax)^4. \end{aligned}$$

L'équation devient donc

$$(3x^2-2ax-a^2)^4=b^8.$$

Elle se décompose ainsi

$$\begin{aligned} &(3x^2-2ax-a^2-b^2)(3x^2-2ax-a^2+b^2) \\ &\qquad\qquad [(3x^2-2ax-a^2)^2+b^4]=0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(3x^2-2ax-a^2-b^2)(3x^2-2ax-a^2+b^2) \\ &\quad(3x^2-2ax-a^2-b^2\sqrt{-1})(3x^2-2ax-a^2+b^2\sqrt{-1})=0. \end{aligned}$$

On est donc ramené à résoudre quatre équations du second degré, ce qui donne les huit racines

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{a\pm\sqrt{4a^2+3b^2}}{3},$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \frac{a\pm\sqrt{4a^2-3b^2}}{3},$$

$$\left.\begin{matrix} x_5 \\ x_6 \end{matrix}\right\} = \frac{a\pm\sqrt{4a^2+3b^2\sqrt{-1}}}{3},$$

$$\left.\begin{matrix} x_7 \\ x_8 \end{matrix}\right\} = \frac{a\pm\sqrt{4a^2-3b^2\sqrt{-1}}}{3}.$$

Si $b = 0$, ces racines deviennent les deux racines quadruples $x = a$ et $x = -\frac{a}{3}$.

M. **Joseph Joffroy**. — *Fermat* a trouvé une propriété arithmétique qui est traduite par l'égalité

$$a^p = mp + a.$$

Généralisée elle devient

$$a^{p+k(p-1)} = mp + a, \tag{1}$$

p étant premier et les autres nombres entiers quelconques.

Application de la formule (1). — Soit

$$x^{37} + y^{37} = z^{37}; \tag{2}$$

(1) fournit aisément

$$x^{37} = \begin{cases} 2m + x, \\ 3m + x, \\ 5m + x, \\ 7m + x, \\ 13m + x, \\ 19m + x, \\ 36m + x. \end{cases}$$

Donc $x^{37} - x$ qui est multiple de 2, 3, 5, 7, 13, 19, 37 est multiple de leur produit et je puis écrire

$$\begin{aligned} &x^{37} - x = 2.3.5.7.13.19.37m = \mathrm{P}m, \\ &y^{37} - y = \mathrm{P}m', \\ &z^{37} - z = \mathrm{P}m'', \\ &x^{37} + y^{37} - z^{37} + \mathrm{P}m_1 = x + y - z, \end{aligned}$$

ou, en vertu de (2),

$$x + y - z = \mathrm{P}m_1, \tag{3}$$

il est aisé de prouver que $\mathrm{P}m_1$ est positif; (3) donne

$$x = \mathrm{P}m_1 + (z - y)$$

et, si j'ai $x < y < z$, donne

$$x > \mathrm{P} + 1 \quad \text{ou} \quad x > 1919191.$$

Conclusion. — Si l'équation (2) admet des solutions entières, elles sont supérieures à ce nombre, ce qui n'invite pas à penser que cette équation en admet.

Remarque. — De la formule

$$a^{p+k(p-1)} = mp + a$$

je tire aussi aisément

$$a^{85} = 2.3.5.7.13.29.85 = 6729450\,m + a,$$
$$a^{49} = 2.3.5.7.13.17.49 = 2274090\,m + a,$$

et j'en conclus comme ci-dessus pour les solutions entières de

$$x^{85} + y^{85} = z^{85},$$
$$y^{49} + y^{49} = z^{49},$$

supposées possibles, des nombres considérables.

La même remarque est applicable à autant d'équations de *Fermat* que l'on veut considérer.