TH. GOT

# Démonstration d'un théorème de Kummer sur un type de déterminants

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 11 (1911), p. 274-277

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__274_0>

[B1c]

# DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE KUMMER SUR UN TYPE DE DÉTERMINANTS;

Par M. Th. GOT,
Ancien Ingénieur de la Marine,
Professeur au Lycée d'Agen.

Dans le Tome 135 (1909) du *Journal de Crelle*, M. Saalschütz donne une série de formules relatives à certains déterminants qu'il appelle *Zirkulante* et qu'on pourrait appeler, je crois, *circulaires*. La dernière formule qu'il indique se trouve déjà dans Kummer (au signe près, qu'il ne précise pas); c'est pour l'expression du nombre des classes d'idéaux, que ce dernier l'emploie, dans son Mémoire du *Journal de Liouville*, t. XVI (1851).

Comme M. Saalschütz ne donne pas la démonstration de la formule, et que la démonstration de Kummer est incomplète, je crois utile d'en donner une nouvelle, d'autant plus que cette formule paraît susceptible d'autres applications.

Soit D le déterminant circulaire d'ordre $n-1$ :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_n & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_n & \ldots & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}.$$

La formule à démontrer est la suivante :

Si l'on a

$$(1) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0,$$

on a

$$(2) \qquad D = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} \frac{u(\omega_1)\,u(\omega_3)\ldots u(\omega_{n-1})}{n},$$

formule où $u(\omega)$ désigne le polynome :

$$u(\omega) = a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 + \ldots + a_n\omega^{n-1},$$

et où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ sont les racines de l'équation :

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0.$$

Soit en effet $\omega$ une racine quelconque de cette équation; on a, comme $\omega^n$ est égal à 1,

$$\begin{aligned}
u(\omega) &= a_1 + a_2 + a_3\omega^2 + \ldots + a_n\omega^{n-1},\\
\omega\, u(\omega) &= a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + \ldots + a_n,\\
\omega^2 u(\omega) &= a_1\omega^2 + a_2\omega^3 + a_3\omega^4 + \ldots + a_n\omega,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega^{n-1} u(\omega) &= a_1\omega^{n-1} + a_2 + a_3\omega + \ldots + a_n\omega^{n-2}.
\end{aligned}$$

En considérant $u(\omega)$ comme donnée, on a ainsi, entre $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, $n$ relations linéaires, dont par suite le déterminant est nul :

$$(3) \qquad \begin{vmatrix}
a_1 - u & a_2 & a_3 & \ldots & a_n\\
a_n & a_1 - u & a_2 & \ldots & a_{n-1}\\
a_{n-1} & a_n & a_1 - u & \ldots & a_{n-2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 - u
\end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation du $n^{\text{ième}}$ degré en $u$ admet pour ses $n$ racines

$$u(\omega_1), \quad u(\omega_2), \quad \ldots, \quad u(\omega_{n-1}), \quad u(1);$$

cette racine $u(1)$ est nulle à cause de la relation (1).

Le terme tout connu est donc nul et le coefficient du terme en $u$ du déterminant développé est égal à $-u(\omega_1)\,u(\omega_2)\,u(\omega_{n-1})$.

Ce coefficient est la somme changée de signe des mineurs relatifs aux éléments de la diagonale principale, du déterminant (3), dans lequel on a fait $u = 0$. Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ces mineurs.

Tous ces mineurs sont égaux ; en effet, le déterminant ne change pas de valeur si l'on recule les $p$ premières colonnes de $n - 1 - p$ rangs, puis les $p$ premières lignes de $n - 1 - p$ rangs, ce qui entraîne un nombre *pair* de permutations de lignes ou de colonnes; le $(p+1)^{\text{ième}}$ terme de la diagonale principale devient alors le premier et l'on constate que le nouveau déterminant est identique au premier. Tout revient donc à démontrer que l'un de ces mineurs, $M_1$ par exemple, est égal à $(-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} D$ :

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_n & \ldots & a_{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}.$$

En ajoutant toutes les lignes à la seconde et tenant compte de (1) on remplace les éléments de cette ligne par $-a_2, -a_3, \ldots, -a_n$ et l'on voit alors que $-M_1$ est formé des mêmes lignes que D, à leur ordre près.

Pour ramener à leur place les $n - 2$ dernières lignes de $M_1$, il faut effectuer $n - 4 + n - 5 + \ldots + 1$ permutations de lignes, c'est-à-dire $\frac{(n+4)(n-3)}{2}$.

On a donc

$$-M_1 = (-1)^{\frac{(n-4)(n-3)}{2}} D.$$

D'ailleurs $\frac{(n-4)(n-3)}{2} + 1$ et $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ sont de même parité; on a donc bien

$$u(\omega_1)\,u(\omega_2)\ldots u(\omega_{n-1}) = n M_1 = (-1)^{\frac{(n+2\ (n-1)}{2}} n D.$$

C. Q. F. D.

*Remarque.* — Cette formule donne la norme du nombre $u(\omega)$ dans le corps circulaire $c\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)$, sous une forme commode.

D'ailleurs, tout entier de ce corps peut se mettre aisément sous la forme $u(\omega)$ dans laquelle la somme des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est nulle; ils ne sont alors pas entiers, mais cette transformation peut cependant être avantageuse.