NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. PLANE

Recherches géométriques sur les normales à une parabole issues d'un même point

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 241-261

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__241_0>

[L¹10b]

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES SUR LES NORMALES A UNE PARABOLE ISSUES D'UN MÊME POINT;

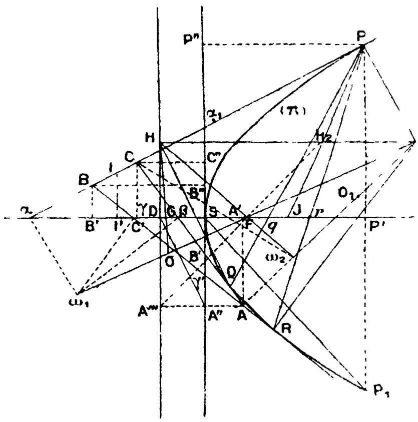
PAR M. J. PLANE.

Dans cette Note, à laquelle j'ai été amené par la recherche d'une solution géométrique de questions proposées dernièrement, sur ce sujet, dans les *Nouvelles Annales*, je me propose surtout de faire une étude d'ensemble sur les propriétés des triangles inscrits et circonscrits à une parabole aux trois pieds des normales issues d'un même point. Ceci m'a conduit, dans les débuts du travail tout au moins, à retrouver un certain nombre de propriétés bien connues (dues à Steiner entre autres). Aussi dans l'impossibilité où je suis de citer les noms de tous les auteurs originaux je prie le lecteur de considérer bien moins la nouveauté des propriétés que j'établis que celle des démonstrations.

Pour faciliter la lecture de cette Note, je me suis efforcé de conserver toujours les mêmes notations. Je désignerai en particulier par ωP, ωQ, ωR les normales issues d'un point ω à une parabole (Π), par ABC le triangle circonscrit à (Π) aux points P, Q, R; α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 les points où ses côtés coupent l'axe et la tangente au sommet de (Π), et d'une façon générale par K', K'', K''' les projections d'un point quelconque K sur l'axe, la tangente au sommet et la directrice de (Π).

I. Triangle circonscrit. — 1. Les symétriques des normales ωP, ωQ, ωR par rapport au foyer F de (Π) sont les perpendiculaires élevées de α, β, γ aux côtés BC, CA, AB (*fig.* 1). Elles se coupent en ω_1 symé-

Fig. 1.



trique de ω par rapport à F. ω_1 est par suite sur le cercle circonscrit à ABC, la droite de Simpson correspondante étant l'axe de (Π). Mais le foyer F est aussi sur ce cercle, la droite de Simpson correspondante étant la tangente au sommet.

Ces deux droites sont rectangulaires, d'après une propriété connue et d'ailleurs facile à établir géométriquement; F et ω_1 sont donc diamétralement opposés sur le cercle circonscrit; par suite :

Le centre O *du cercle circonscrit à* ABC *est l'homologue du point* ω *dans une homothétie de centre* F *et de rapport* $-\frac{1}{2}$. *Son rayon est* OF.

2. Une droite de Simpson est équidistante de l'orthocentre et du point qui lui a donné naissance; donc :

L'orthocentre H *du triangle* ABC *est le pied sur la directrice du diamètre de* (Π) *passant par* ω.

3. La droite OH coupe l'axe en un point G tel que

$$\frac{OG}{OH} = \frac{OF}{O\omega} = \frac{1}{3};$$

donc :

Le centre de gravité G *du triangle* ABC *est sur l'axe.*

On sait que la distance du centre de gravité G d'un triangle à une droite est le tiers de la somme algébrique des distances des trois sommets à la même droite, donc :

La somme algébrique des distances des points A, B, C *à l'axe est nulle.*

4. La première proposition énoncée nous montre que :

Les médiatrices du triangle ABC *restent, quand* ω *varie, normales à une même parabole* (Π_1), *homothétique de* (Π) *par rapport au foyer, le rapport d'homothétie étant* $-\frac{1}{2}$.

5. Elle nous montre encore immédiatement que :

Le milieu I *de* BC *est fixe lorsque* ω *décrit la normale* ωP, *c'est le milieu de* $\alpha\alpha_1$.

On en conclut que si, avec les axes ordinaires, les coordonnées de P sont (x, y) celles du point I sont

$$x' = -\frac{x}{2}, \qquad y' = \frac{y}{4},$$

et comme

$$y^2 = 2px,$$

on en tire

$$y'^2 = -\frac{2p}{8}x',$$

et par suite :

Le lieu des milieux des côtés du triangle ABC *lorsque* ω *varie est une parabole* (Π_2) *déduite de* (Π) *par homothétie par rapport au sommet* S *et dans le rapport* $-\frac{1}{8}$.

6. Les milieux des côtés BC, CA, AB coïncident respectivement avec ceux des segments $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, donc, en vertu d'une propriété bien connue :

A, B, C *et par suite* H *sont sur une hyperbole équilatère* (H) *ayant l'axe et la tangente au sommet pour asymptotes.*

(Je dois cette démonstration, plus simple que celle que j'avais d'abord fournie, à l'amabilité de M. Bricard qui a bien voulu me faire l'honneur de revoir mon travail.)

Le centre de cette hyperbole (H) est le sommet S de (Π), donc :

Le cercle des neuf points du triangle ABC *passe par le sommet* S *de la parabole* (Π).

II. Triangle inscrit. — 7. Le milieu de QR et le point A sont sur une parallèle à l'axe, donc

$$\Sigma\, PP' = \Sigma\, AA';$$

d'où :

La droite qui joint les centres de gravité de deux triangles inscrits et circonscrits à une parabole aux mêmes points est parallèle à l'axe.

En particulier :

Le centre de gravité G_1 *du triangle* PQR *est sur l'axe.*

Il y a mieux, on a

$$PP'' = S\alpha = -(CC'' + BB''),$$

donc

$$\Sigma PP'' = -2\Sigma AA''$$

et

$$SG_1 = -2SG.$$

Le centre de gravité G_1 *du triangle* PQR *est homothétique par rapport au sommet* S *et dans le rapport* -2 *du centre de gravité* G *du triangle* ABC.

8. On a

$$QQ' + RR' = -PP' = P_1P',$$

P_1 étant symétrique de P par rapport à l'axe.

Les milieux de SP_1 et de QR sont sur un même diamètre, SP_1 et QR sont donc parallèles, autrement dit SP et QR sont antiparallèles par rapport à l'axe et, d'après une propriété connue, le quadrilatère PQRS est inscriptible.

Le cercle circonscrit au triangle PQR *passe par le sommet.*

9. Proposons-nous de chercher son centre O_1.

Ce cercle et le cercle de diamètre $A\omega$ ont pour axe radical QR. O_1 est donc le milieu du segment qui joint ω au point de rencontre ω_2 des perpendiculaires abaissées de A, B, C sur leurs polaires.

Mais $A\omega_2$ par exemple est parallèle à FA'''. En effet FA''' est perpendiculaire à la tangente à (Π) au pied sur cette courbe du diamètre passant par A.

De plus AH, parallèle à $F\alpha_1$, est parallèle à DA'', D étant le pied de la directrice; donc (*fig.* 1)

$$\frac{AA'''}{HA'''} = \frac{A''A'''}{DA'''}, \qquad \frac{HH_2}{HA'''} = \frac{DF}{DA'''},$$

d'où

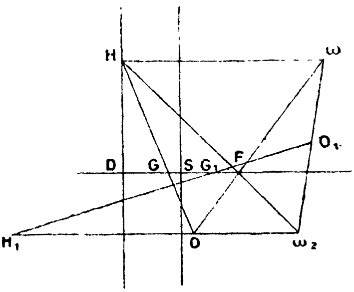
$$HH_2 = 2AA'''.$$

L'homothétique de $A\omega_2$ par rapport au foyer et dans le rapport -2 passe par H; donc (*fig.* 1) :

Le centre O_1 *du cercle circonscrit à* PQR *est le milieu du segment* $\omega\omega_2$, ω_2 *étant homothétique de* H *par rapport à* F $\left(\textit{rapport } -\frac{1}{2}\right)$. *Son rayon est* O_1S.

10. Connaissant ω on saura donc construire d'une façon très simple les points O, G, H, O_1, G_1 et par suite aussi l'orthocentre H_1 de PQR.

Fig. 2.



Ces constructions se résument dans la figure 1 où

$$\overline{F\omega} + 2\overline{FO} = 0, \qquad \overline{FH} + 2\overline{F\omega_2} = 0,$$
$$\overline{GH} + 2\overline{GO} = 0. \qquad \overline{G_1H_1} + 2\overline{G_1O_1} = 0,$$
$$\overline{SG_1} + 2\overline{SG} = 0;$$

O, H_1 et ω_2 sont sur une même parallèle à l'axe.

11. Le paragraphe 5 a un corrélatif qu'il suffit de citer:

Les côtés PQ, PR *découpent sur l'axe de la parabole un segment* qr *dont le milieu* J *est fixe quand* ω *décrit* ωP. *C'est le milieu* J *de* SP'. *L'enveloppe de* PJ *quand* P *varie est une parabole* (Π'_2).

On peut ajouter que :

Quand ω décrit ωP, QR antiparallèle à SP se déplace parallèlement à lui-même.

III. Applications. — 12. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle inscrit (ou circonscrit) à une parabole* (II) *soit tel que les normales à* (II) *aux sommets (ou aux points de contact) soient concourantes est que son centre de gravité soit sur l'axe.*

En effet considérons simultanément les triangles ABC et PQR circonscrit et inscrit à (II) aux mêmes points P, Q, R. Si le centre de gravité G de ABC est sur l'axe, celui G_1 de PQR y est aussi (§ 7) et réciproquement. En conservant les notations de la figure 1 on a donc

$$2II' = BB' + CC' = -AA' = -\frac{QQ' + RR'}{2} = \frac{PP'}{2} = \alpha_1 S.$$

I est donc le milieu de $\alpha\alpha_1$ et, si O est le centre du cercle circonscrit à ABC, les normales à (II) aux points P, Q, R concourent en ω sur OF tel que $O\omega = 3OF$.

Cette condition nécessaire est donc aussi suffisante.

13. Le foyer F n'est évidemment pas un point quelconque du cercle circonscrit à ABC.

Proposons-nous de rechercher quelles sont les paraboles inscrites dans un triangle donnée ABC et telles que les normales aux points de contact soient concourantes.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'axe de la parabole passe par le centre de gravité G de ABC.

Soit F le foyer d'une telle parabole (*fig.* 3).

Le théorème de Poncelet nous indique que

$$\widehat{FAC} = \widehat{BAG'}.$$

Mais

$$\widehat{FAG} = \widehat{FAC} + \widehat{CAG},$$

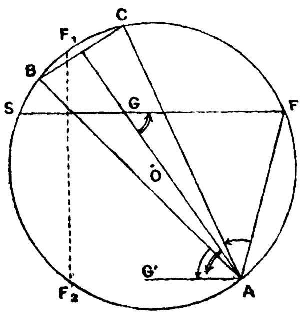
$$\widehat{AGF} = \widehat{GAG'} = GAB + \widehat{BAG'} = \widehat{FAC} + \widehat{GAB}$$

en grandeur et sens, donc

$$\widehat{FAG} - \widehat{AGF} = \widehat{CAG} - \widehat{GAB} = \text{const.}$$

Le point F se trouve donc sur une hyperbole équila-

Fig. 3.



tère de diamètre AG, le diamètre conjugué faisant avec AG un angle égal à $\widehat{CAG} - \widehat{GAB}$. La tangente en A est donc la symédiane du triangle ABC.

Cette hyperbole est donc bien déterminée, elle coupe le cercle circonscrit à ABC en trois points F, F_1, F_2 autres que A et qui répondent à la question. Ces points sont évidemment sur les hyperboles analogues passant par B et C; donc :

Étant donnés un triangle ABC *et* G *son centre de gravité, les hyperboles équilatères ayant pour diamètres* AG, BG, CG *et tangentes respectivement en*

A, B, C *aux symédianes de* ABC, *font partie d'un même faisceau dont les sommets autres que* G *sont sur le cercle circonscrit.*

Ces sommets F, F_1, F_2 *sont les foyers des trois seules paraboles inscrites dans* ABC *et telles que les normales aux points de contact soient concourantes.*

Les points F, F_1, F_2, G *forment un groupe orthocentrique;* G *est par suite l'orthocentre du triangle* FF_1F_2.

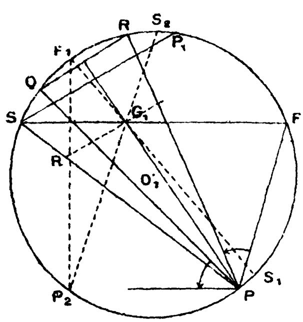
Cette dernière partie permet de construire facilement F_1F_2 connaissant F et ABC. Si S est le deuxième point de rencontre de FG avec le cercle circonscrit à ABC, F_1F_2 est perpendiculaire au milieu de GS.

14. La même question se pose dans le cas des triangles inscrits :

Quelles sont les paraboles circonscrites à un triangle donné PQR et telles que les normales en P, Q, R soient concourantes.

Nous rechercherons les sommets de ces paraboles.

Fig. 4.



Soit S un tel sommet (*fig.* 4), il est sur le cercle circonscrit à PQR et une de ses propriétés caractéristiques est que SG_1 (axe de la parabole) est bissectrice de l'angle $\widehat{PSP_1}$, SP_1 étant parallèle à QR.

Soit F le point où SG_1 coupe le cercle circonscrit.

Par hypothèse

$$\overset{\frown}{PF} = \overset{\frown}{FP_1}.$$

mais

$$\overset{\frown}{SQ} = \overset{\frown}{RP_1},$$

donc

$$\overset{\frown}{PF} - \overset{\frown}{SQ} = \overset{\frown}{FR} \quad \text{ou} \quad \widehat{PQ, FG_1} = \widehat{PF, PR}.$$

F est donc le foyer d'une parabole inscrite dans PQR et telles que les normales aux points de contact soient concourantes : c'est l'un des points F, F_1, F_2 du paragraphe précédent; d'où :

Étant donné un triangle PQR *il existe trois paraboles et trois seulement circonscrites à* PQR *et telles que les normales en* P, Q, R *soient concourantes; leurs trois sommets* S, S_1, S_2 *sont sur le cercle circonscrit à* PQR. *Ce sont les inverses des points* F, F_1, F_2 *dans l'inversion de centre* G_1 *qui transforme ce cercle en lui-même. Le triangle qu'ils forment a donc le point* G_1 *pour centre du cercle inscrit.*

Remarquons d'ailleurs que si R est le rayon du cercle circonscrit à PQR, O_1 son centre, le rayon r du cercle inscrit à SS_1S_2 est donné par la relation d'Euler

$$\overline{O_1G_1}^2 = R^2 - 2Rr.$$

15. On aurait pu arriver au même résultat d'une autre façon.

Soit S un des sommets cherchés. Menons par G_1 la parallèle à QR qui coupe SP en K. SG_1 étant bissectrice de $\widehat{PSP_1}$ le triangle SKG_1 est isocèle. S se trouve donc sur une strophoïde de pôle P, de point double G_1 ayant pour directrice la parallèle à QR menée par G_1. Tout point de rencontre de cette strophoïde et du cercle circonscrit (autre que P et les points cycliques) est d'ailleurs un point S cherché. Il y a donc trois sommets S, S_1, S_2, situés sur le cercle circonscrit et sur trois strophoïdes analogues à la précédente.

D'ailleurs :

Le triangle formé par les trois points de rencontre de deux strophoïdes ayant même point double a ce point double pour centre du cercle inscrit.

Il suffit pour le voir de transformer par inversion par rapport au point double commun. Les deux strophoïdes se transforment en hyperboles équilatères et le triangle transformé a le point double comme orthocentre.

16. Problème. — *Construire les trois normales à une parabole* (Π) *donnée, issues d'un point donné* ω, *connaissant l'une d'elles.*

Les résultats précédents nous permettent d'en donner une solution très simple.

Soit ωP la normale connue (*fig.* 1). On a immédiatement un côté PBC du triangle circonscrit. On a aussi le cercle circonscrit à ce triangle, d'où deux sommets B et C, les normales inconnues sont donc les normales à (Π) aux points de contact de (Π) avec les tangentes issues de B et C.

Cette construction n'est possible que si OF > OI.

Si OI = OF, B et C sont confondus en I, le troisième sommet A est sur (Π) et confondu avec Q et R, ω est alors le centre de courbure de la parabole en A.

17. Dans ce cas nous voyons (*fig.* 5) que :

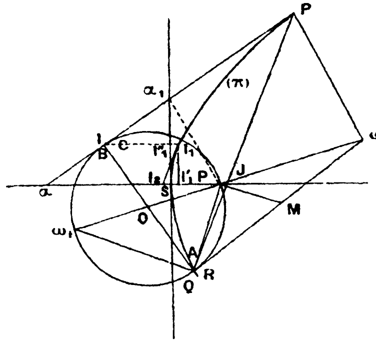
Étant donnés une tangente $P\alpha\alpha_1$ quelconque à la parabole, I le milieu de $\alpha\alpha_1$, PQ sa polaire :

Le cercle circonscrit à QFI est tangent en I à $P\alpha\alpha_1$;

Le cercle circonscrit à PQS est tangent en Q à (Π);

Le point de rencontre ω des normales en P et Q à (Π) est le centre de courbure de cette courbe en Q.

Fig. 5.



On peut en déduire la construction bien connue du centre de courbure ω en un point Q d'une parabole.

En effet si ω_1 est symétrique de ω par rapport à F, il est sur le cercle circonscrit à QFI et diamétralement opposé de F, FQ est donc perpendiculaire sur $Q\omega_1$; d'où :

Le centre de courbure ω *en un point* Q *d'une parabole s'obtient en menant par le foyer* F *la perpendiculaire à* QF *qui coupe la normale en* Q *au milieu* M *de* $Q\omega$.

18. La droite PQ est d'ailleurs la polaire de I par rapport à (Π) mais d'autre part le lieu de I est une parabole (Π_2) (§ 5), l'enveloppe de sa polaire est une parabole (Π'_2) et en considérant des points particuliers on voit que :

L'enveloppe des cordes joignant les pieds des normales à une parabole (Π) *issues des différents points de sa développée est une parabole* (Π'_2) *homothétique de* (Π) *par rapport au sommet* S *le rapport d'homothétie étant* -8.

On peut d'ailleurs établir directement cette proposition.

Si I_1 est le pied sur (Π) du diamètre passant par I (*fig.* 5) on a

$$I_1 I'_1 = II' = \frac{PP'}{4}.$$

Dans une parabole

$$\frac{I_1 I'_1}{I_1 I''_1} = \text{const.};$$

donc

$$SI'_1 = \frac{SP'}{16},$$

mais

$$SI'_1 = -SI_2, \qquad SP' = 2SJ;$$

donc

$$SJ = -8SI_2.$$

PQ enveloppe donc bien la parabole (Π_2) annoncée.

19. On a vu d'une façon générale (§ 12) que $AA' = S\alpha_1$. Ici on a donc

$$QQ' = S\alpha_1 = -\frac{PP'}{2}.$$

Soient p, q, r les centres de courbure de (Π) en P, Q, R; pP_1, qQ_1, rR_1 les deuxièmes normales à la parabole issues de p, q, r; on a

$$P_1 P'_1 = -\frac{PP'}{2};$$

donc

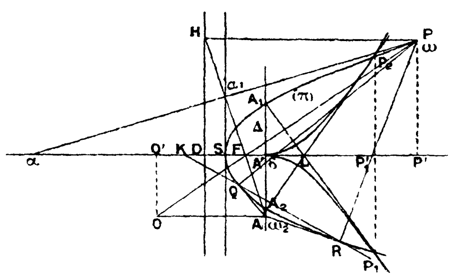
$$\Sigma P_1 P'_1 = -\frac{1}{2} \Sigma PP' = 0.$$

Le centre de gravité du triangle $P_1 Q_1 R_1$ est donc sur l'axe; par suite :

Les secondes normales à (Π) *issues des centres de courbure de cette courbe en* P, Q, R *concourent en un même point.*

20. Comme cas particulier du problème résolu au paragraphe 16 on voit qu'on saura toujours construire

Fig. 6.



les normales à (Π) issues d'un point de cette courbe.

Dans ce cas P est confondu avec ω (*fig.* 6) et

$$AA' = S\alpha_1 = -\frac{PP'}{2} = \frac{HD}{2} = OO':$$

OA est donc parallèle à l'axe; de plus

$$OA = OF = \frac{FP}{2} = \frac{HP}{2},$$

H, F, A sont donc en ligne droite et $\overline{FH} + 2\overline{FA} = 0$.

A est alors confondu avec le point ω_2 (§ 9) le cercle circonscrit à PQR a pour diamètre PA.

Il y a mieux : quand ω varie, A décrit comme ω_2 la symétrique Δ de la tangente au sommet par rapport au foyer, mais c'est le pôle de QR; QR passe donc par un point fixe K pôle de Δ.

Les cordes joignant les pieds des normales à une parabole issues d'un point de cette courbe passent par un point fixe K *symétrique du sommet* S *par rapport au pied* D *de la directrice.*

21. Ceci nous permet de trouver les points de rencontre d'une parabole (Π) et de sa développée.

P sera centre de courbure si Q, R, A sont confondus sur (Π). Les points cherchés P_1 P_2 sont donc ceux situés sur les normales à (Π) aux points où celle-ci est coupée par Δ. Le pied δ de Δ sur l'axe est d'ailleurs le centre de courbure au sommet S, de plus les tangentes à la développée en P_1 P_2 sont $P_1 A_1$, $P_2 A_2$ (*fig.* 6).

Si $SD = p$, on a

$$S\delta = p, \qquad SL = 2p,$$

et comme

$$P_1 P'_1 = 2 A_1 A'_1, \qquad SP'_1 = 4p,$$

Ces résultats sont bien connus.

IV. Correspondance [ω; A, B, C]. — **22**. Les résultats qui précèdent permettent d'établir entre les points du plan considérés comme points ω et les points A, B, C ou les côtés QR, RP, PQ correspondants, une correspondance (1, 3) jouant pour les normales le rôle de la théorie des pôles et polaires pour les tangentes.

Et d'abord il suffit d'étudier la correspondance (ω; A, B, C), les propriétés des côtés QR, RP, PQ n'étant que les corrélatives des propriétés des points A, B, C.

Quelques résultats sont immédiats. Ce sont les seuls que nous donnerons.

23. Si ω décrit une normale ωP à la parabole (Π), B et C décrivent la tangente correspondante; de plus comme

$$AA' = -\frac{PP'}{2},$$

A décrit un diamètre de (Π).

24. *Si* ω *décrit une parallèle à l'axe*, H *est fixe*, A, B, C *décrivent donc l'hyperbole* (H) *qui passe par* H *et a l'axe et la tangente au sommet pour asymptotes.*

25. *Si* ω *décrit une perpendiculaire à l'axe*, G *est fixe*, A, B, C *décrivent donc une parabole* (Π') *homothétique de celle* (Π_2) *lieu de* I, *par rapport à* G, *le rapport d'homothétie étant* -2.

Toutes ces paraboles (Π') sont égales entre elles, si p est le paramètre de (Π), leur paramètre commun est $\frac{p}{4}$ et elles se déduisent l'une de l'autre par translation parallèle à l'axe.

26. A, B, C sont toujours sur deux faisceaux de coniques, les paraboles (Π') et les hyperboles équilatères (H).

Si ω décrit une droite Δ les coniques (H) et (Π') se correspondent homographiquement : En effet, étant donnée une hyperbole (H), le point H est bien déterminé et unique, il en est donc de même de ω, G et par suite de (Π'); étant donnée une parabole (Π'), G est bien déterminé, $H\omega = 3GF$ est connu, ω est donc bien déterminé et unique et par suite aussi l'hyperbole (H) correspondante.

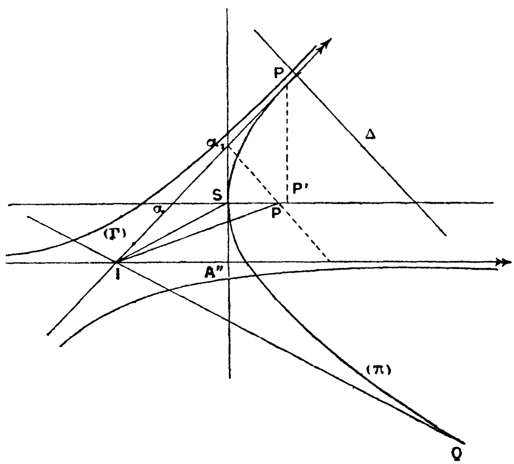
A, B, C décrivent donc une courbe du 4^e degré.

Mais, si ω est le point à l'infini sur Δ, les coniques

(H) et (Π') dégénèrent en la droite de l'infini considérée comme droite double, cette droite double fait donc partie du lieu et le lieu véritable est une conique (Γ).

De plus si ω est le point à l'infini sur Δ, on voit immédiatement qu'une asymptote de (Γ) est la tangente à (Π) perpendiculaire à Δ (*fig.* 7).

Fig. 7.



Si P est son point de contact, B et C sont sur cette droite; A est donc à l'infini sur le diamètre de (Π) situé à une distance $-\frac{PP'}{2}$ de l'axe. C'est la deuxième asymptote de (Γ).

Soient I leur point de rencontre, centre de (Γ), IQ la deuxième tangente à (Π) issue de I. On a

$$PP' + QQ' = 2II' = 2AA' = -PP',$$

donc

$$QQ' = 4II'.$$

I est le milieu du segment déterminé sur IQ par l'axe et la tangente au sommet de (Π), il décrit quand Δ varie la parabole (Π_2) (§ 5).

En résumé :

Si ω *décrit une droite* Δ, A, B, C *décrivent une conique* (Γ) *ayant pour asymptotes la tangente à* (Π), *perpendiculaire à* Δ *et une parallèle à l'axe.*

Le lieu des centres des coniques (Γ), *lorsque* Δ *varie, est la parabole* (Π_2).

27. S étant le milieu du segment $\alpha_1 A''$ déterminé sur la tangente au sommet par les deux asymptotes de (Γ) on voit que :

Dans toute conique (Γ), *le diamètre conjugué des cordes perpendiculaires à l'axe passe par le sommet* S *de* (Π).

De même :

Le diamètre conjugué des cordes parallèles à Δ *passe par le foyer* F *de* (Π).

Il en résulte en particulier que :

Étant donnée une hyperbole quelconque (Γ), *il y a une infinité de paraboles* (Π) *correspondantes et ces paraboles sont homothétiques entre elles par rapport au centre* I *de* (Γ).

Les propriétés qui suivent sont la conséquence immédiate de ce qui précède :

28. *Deux triangles* ABC *quelconques sont toujours inscrits dans une même conique* (Γ).

29. *Deux coniques* (Γ) *et* (Γ') *se coupent à distance finie en trois points qui sont les sommets du triangle* ABC *correspondant au point* ω *de rencontre des droites* Δ *et* Δ' *qui leur sont associées.*

Donc :

30. *Lorsque la droite Δ tourne autour d'un point ω les coniques (Γ) correspondantes font partie d'un faisceau ponctuel (F) ayant pour sommets le point à l'infini sur l'axe de (Π) et les points* ABC *correspondant à ω.*

Lorsque ce point ω décrit une droite Δ tous ces faisceaux ont en commun la conique (Γ) correspondant à Δ.

Comme cas particulier on peut citer :

31. *Lorsque la droite Δ se déplace parallèlement à elle-même les coniques (Γ) forment un faisceau* (F) *d'hyperboles ayant mêmes asymptotes, (Γ) se réduisant à ses asymptotes lorsque Δ est normale à (Π). Ces faisceaux ont en commun la droite de l'infini considérée comme droite double.*

32. Remarquons aussi que dans chacun des faisceaux (F) il y a une hyperbole (Γ_1) passant par le sommet S de (Π). Elle correspond à la droite Δ qui passe par le centre de courbure δ de (Π) au sommet. Lorsque Δ tourne autour de δ, on a :

Les hyperboles (Γ_1) osculatrices à une parabole (Π) à son sommet S *et passant par le point à l'infini sur l'axe ont leur deuxième asymptote tangente à (Π). Il y a une infinité de triangles inscrits dans (Γ_1) et circonscrits à (Π) en* P, Q, R. *Les normales à (Π) en* P, Q, R *concourent en un point ω, qui pour une même hyperbole (Γ_1) décrit une droite Δ passant par le centre de courbure δ de (Π) au sommet.*

33. Toutes les coniques (Γ) peuvent être définies de la façon suivante :

On considère une conique particulière (Γ') et un faisceau (F') particulier ne contenant pas (Γ'), les coniques (Γ) font toutes partie des divers faisceaux déterminés par (Γ') et une conique quelconque de (F'). De plus toutes les coniques ainsi définies sont des coniques (Γ) donc :

Les coniques (Γ) *font toutes partie d'un réseau ponctuel ayant une droite double, la droite de l'infini.*

La jacobienne du réseau est donc formée de cette droite double et du lieu (Π_2) *des centres des coniques* (Γ).

Les résultats précédents peuvent servir à établir quelques autres propriétés.

34. *Si* A *décrit une droite* D (QR *passe par un point fixe* K), ω *décrit une parabole dont l'axe est perpendiculaire à* D.

En effet cherchons combien il y a de points ω sur une droite quelconque Δ : lorsque ω décrit Δ, A décrit une conique (Γ) qui coupe D en deux points. A un point A correspond un point ω et un seul, ω décrit donc une conique.

ω ne peut s'éloigner indéfiniment que si les normales en Q et R sont parallèles ou si l'une d'elles est rejetée à l'infini. Ces deux cas se produisent simultanément si QR est parallèle à l'axe. La direction asymptotique double est donc celle de la normale au pied sur (Π) du diamètre passant par K. Elle est bien perpendiculaire à D polaire de K.

La propriété énoncée au paragraphe 20 apparaît alors comme un simple cas particulier de la proposition précédente.

35. Plus généralement et par des considérations analogues on reconnaît que :

Si ω *décrit une courbe* (C) *de degré* n, A, B, C *décrivent une courbe* (C_1) *de degré* $2n$.

Si A *décrit une courbe de degré* n, ω *décrit une courbe de degré* $2n$ *et par suite* B *et* C *une courbe de degré* $3n$.

En particulier si A décrit une droite, B et C décrivent une cubique.

36. Si l'on sait construire la tangente T en un point ω de (C) et si l'on connaît les points A, B, C de (C_1) correspondants [et pour cela il suffit de connaître une normale à (Π) issue de ω], on saura construire les tangentes à (C_1) en A, B, C.

En effet, considérons une droite quelconque passant par ω. Soient ω un de ses points de rencontre avec (C), A_1, B_1, C_1 les points correspondants de (C_1). A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont sur une même conique (Γ_1) dont nous connaissons les asymptotes. Lorsque Δ tend vers la tangente T à (C) en ω, A_1, B_1, C_1 tendent respectivement sur (C_1) vers A, B, C; donc :

La conique (Γ) *correspondant à la tangente* T *à* (C) *en un point* ω *est tritangente à* (C_1) *aux points* A, B, C *correspondant à* ω.

Tout revient donc à construire les tangentes en trois points donnés A, B, C d'une hyperbole dont on connaît les symptotes, problème très simple et bien connu.