Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 239-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__239_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2154.

(1910, p. 240.)

On donne un cercle C *de centre* O *et de rayon* R *et un point fixe* A, *tel que* $OA = \frac{R}{\sqrt{2}}$. *On considère toutes les ellipses qui ont le cercle* C *pour cercle orthoptique et qui passent par* A.

Montrer que :

1° *Ces ellipses enveloppent une ellipse ;*

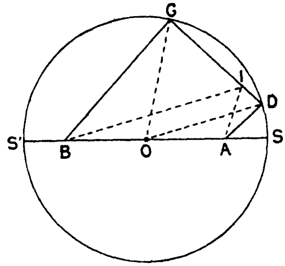
2° *Le lieu de leurs sommets se compose de deux cercles;*

3° *Le lieu de leurs foyers se compose de deux lemniscates de Bernoulli.* E.-N. Barisien.

SOLUTION,

Par M. L. Klug.

1° Soient B le symétrique de A par rapport à O, S et S′ les points de rencontre de AB avec le cercle donné. Soit encore AD la tangente en A à l'une des ellipses variables considérées (E). Cette ellipse passe en B et sa tangente en ce point est BG parallèle à AD. En outre, si AD et BG rencontrent respectivement en D et G le cercle donné, DG est perpendiculaire à AD et BG. DG est donc tangente à l'ellipse (E), puisque le cercle donné est son cercle orthoptique. Si I est le point de contact, OG doit passer par le milieu de BI. OG est



donc parallèle à AI; de même OD est parallèle à BI. On voit donc que l'ellipse (E) touche au point I, l'ellipse fixe ayant pour foyers A et B et pour grand axe SS'. C'est l'enveloppe cherchée.

2° Soit x la longueur du demi-diamètre de (E), conjugué de AB. On a, par le théorème d'Apollonius,

$$x^2 + \overline{OA}^2 = \text{somme des carrés des demi-axes de (E)}$$
$$= R^2 = 2\overline{OA}^2,$$

d'où

$$x = OA.$$

Ainsi AB est un des deux diamètres conjugués égaux de (E). Soient alors M un des sommets de cette ellipse, φ l'angle que fait OM avec OA. Si ON est un demi-axe perpendiculaire à OM, on doit avoir

$$\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = R^2,$$
$$\frac{OM}{ON} = \pm \operatorname{tang}\varphi,$$

d'où

$$OM = \pm R\cos\varphi, \qquad ON = \pm R\sin\varphi.$$

Les points M et N décrivent donc les deux cercles ayant pour diamètres OS et OS'.

3° Soit F un foyer de (E), supposons-le porté par l'axe OM. On a

$$\overline{OF}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{ON}^2 = R^2\cos 2\varphi;$$

ce qui montre que le point F décrit une lemniscate de Bernoulli, de foyers A et A'.

Autres solutions par MM. Abramescu, R. Bouvaist et H. Lez.