G. VALIRON

Sur le développement de Taylor d'une fonction méromorphe

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 18-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__18_0>

[D4c]

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR D'UNE FONCTION MÉROMORPHE;

PAR M. G. VALIRON.

M. Borel a démontré la proposition suivante :

Une fonction méromorphe, dans tout le plan, ne peut être représentée par une série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} x^n,$$

où a_n et b_n sont des entiers et où $\sqrt[n]{|b_n|}$ reste fini lorsque $|b_n|$ ne renferme pas de facteurs premiers dont le module soit infini avec n, à moins qu'elle ne se réduise à une fraction rationnelle à coefficients entiers ([1]).

On peut, dans une certaine mesure, étendre le théorème au cas où le dénominateur contient des facteurs premiers qui deviennent infinis avec n. On a le résultat suivant.

La série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{b_n \prod_{1}^{p} (n + k_i)},$$

où a_n et b_n sont des entiers réels ou complexes, $|b_n|$ satisfaisant aux conditions précédentes et où les p

([1]) Voir BOREL, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1894, et *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 37. — HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, p. 97.

nombres $k_1 \dots k_p$ sont entiers et réels, ne peut représenter une fonction méromorphe dans tout le plan.

(Lorsque certains des nombres k_i sont négatifs les coefficients ne sont de la forme indiquée qu'à partir d'une certaine valeur de n).

Posons

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{a_n x^n}{b_n \prod_1^p (n + k_i)}.$$

Si $f(x)$ est une fonction méromorphe il en est de même de la fonction

$$f_1(x) = x^{k_p} f(x) = \sum_1^\infty \frac{a_n x^{+k_p}}{b_n \prod_1^p (n + k_i)},$$

et par conséquent de sa dérivée

$$f_2(x) = f_1'(x) = \sum_1^\infty \frac{a_n x^{n+k_p-1}}{b_n \prod_1^{p-1} (n + k_i)},$$

cette dérivée est de la même forme que $f(x)$ avec un terme de moins en dénominateur. (Il est nécessaire, lorsque k_p est négatif, de supprimer un certain nombre de termes qui contiennent des puissances négatives de x).

En opérant de même avec $f_2(x)$ et ainsi de suite on arrivera à la fonction

$$f_{2p}(x) = \sum_1^\infty \frac{a_n x^{n+k_1+\dots+k_p-p}}{b_n},$$

qui devra être une fonction méromorphe. Mais ce ne peut être qu'une fraction rationnelle à coefficients entiers d'après le théorème de M. Borel. La fonction $f(x)$ et toutes les fonctions intermédiaires sont donc aussi des fractions rationnelles puisqu'elles ont les mêmes pôles que $f_{2p}(x)$.

Mais on sait que lorsque la fonction primitive d'une fraction rationnelle est une fraction rationnelle, on l'obtient par des opérations rationnelles, donc en remontant de proche en proche la suite des fonctions $f_{2p-1}(x), \ldots, f(x)$, on voit que toutes ces fonctions sont des fonctions rationnelles à coefficients entiers.

Finalement l'hypothèse que $f(x)$ est méromorphe dans tout le plan conduit à la conclusion que c'est une fraction rationnelle à coefficients entiers, ce qui est impossible, car le développement en série d'une telle fonction est de la forme

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{b_n} x^n,$$

$|b_n|$ satisfaisant à la condition énoncée. Par conséquent le développement

$$\sum_1^\infty \frac{a_n x^n}{b_n \prod_1^p (n+k_i)},$$

ne peut pas représenter une fonction méromorphe dans tout le plan.