Nouvelles annales de mathématiques

Émile Turrière

Une application du théorème de Malus au problème de Transon

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 160-165

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__160_0>

[$O^1 7a$]

UNE APPLICATION DU THÉORÈME DE MALUS AU PROBLÈME DE TRANSON;

Par M. Émile TURRIÈRE.

Soit un complexe de droites (C) tel que tout cône du complexe admette un axe de symétrie binaire : il en est ainsi en particulier pour les complexes quadratiques, puisque chaque cône du complexe étant du second degré admet trois axes de symétrie. De chaque point de l'espace partent ainsi une ou plusieurs droites, en nombre très limité, qui sont les axes des cônes du complexe (C); ces axes définissent donc, en général, un nouveau complexe (C'). Je me propose de montrer que la considération du complexe (C') peut avoir parfois de l'intérêt. Tout d'abord je donnerai quelques exemples de complexes (C').

1. Si le complexe (C) est le complexe linéaire, tout rayon du complexe passant par un point est axe de symétrie du plan focal de ce point : dans le cas où le complexe (C) est le complexe linéaire, il existe donc une infinité de complexes (C') qui sont tous identiques entre eux et au complexe (C).

La perpendiculaire au plan focal au foyer est un axe de symétrie pour le cône dégénéré en un plan. Dans le cas du complexe linéaire, il existe donc un autre complexe (C'), distinct de (C), qui est *le complexe des perpendiculaires aux plans focaux aux foyers correspondants.*

Considérons le complexe linéaire dont l'équation réduite à sa forme canonique est, en coordonnées plückériennes,

$$p_6 + a p_3 = 0;$$

le plan focal du point de coordonnées (x, y, z) a pour équation

$$\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x + a(\mathrm{Z} - z) = 0;$$

les axes coordonnés étant rectangulaires, il résulte de cette équation que les cosinus directeurs du rayon de (C') issu de (x, y, z) sont, en posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$p_1 = \frac{y}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad p_2 = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad p_3 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}},$$

et que l'équation de ce même complexe est

$$p_3 p_6 - a(p_1^2 + p_2^2) = 0.$$

Ce complexe est donc un complexe quadratique, admettant pour transformations infinitésimales celles du complexe linéaire lui-même, c'est-à-dire la rotation autour de l'axe de révolution Oz et la translation parallèlement à ce même axe.

La détermination des congruences de normales qui appartiennent à ce complexe est aisée. D'après ce qui précède, il est défini à l'aide de points de départ et il suffit de chercher les surfaces de tourbillon du champ de vecteurs $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$:

$$\mathrm{X} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad \mathrm{Y} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}};$$

les projections du vecteur tourbillon sont :

$$\frac{ay}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad -\frac{ax}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{2a^2 + r^2}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}};$$

les équations différentielles des lignes de tourbillon étant

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{a\,dz}{2a^2 + r^2},$$

ces lignes sont des hélices circulaires

$$r = \text{const.}, \qquad z = \frac{2a^2 + r^2}{a}\theta + \text{const.};$$

les surfaces résolvantes de Transon, identiques aux surfaces de tourbillon, sont donc représentées par l'équation générale

$$z = \frac{2a^2 + x^2 + y^2}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - \mathrm{F}(x^2 - y^2),$$

dans laquelle F est une fonction arbitraire de $x^2 + y^2$.

Si l'on désire avoir non pas les surfaces résolvantes, mais les surfaces dont les normales appartiennent au complexe envisagé, il suffit de considérer celles-ci comme enveloppées par des plans

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi,$$

où ϖ est l'intégrale générale,

$$a\varpi = \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\psi + \Phi(\varphi),$$

de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre particulièrement simple

$$a\frac{\partial\varpi}{\partial\psi} = \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}.$$

2. Parmi les complexes quadratiques (C), je considérerai en premier lieu le complexe spécial attaché à une quadrique à centre. Les axes de symétrie d'un cône du complexe (C) sont alors les normales aux surfaces homofocales à la quadrique, qui passent par le sommet du cône. Les axes constituent, par suite, un complexe (C′) unique et qui n'est autre que le complexe tétraédral attaché au système homofocal auquel appartient la quadrique.

Comme second et dernier exemple de complexe quadratique (C) associé à un complexe (C′) simple, je considérerai le complexe, d'équation

$$p_4 p_2 - p_5 p_1 = 0,$$

des droites équidistantes de deux points (*cf.* ma Note : *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard sur les tangentes communes à deux quadriques*, 1910). Le cône issu du point (x, y, z) est parallèle au cône d'équation

$$z(X^2 + Y^2) - xXZ - yYZ = 0;$$

les trois racines de son équation en S sont

$$S = z, \qquad S = \frac{1}{2}\left(z \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right);$$

à la première racine, $S = z$, correspond un axe de direction

$$y, \quad x, \quad 0,$$

et à chacune des deux autres correspondent deux axes de direction

$$x, \quad y, \quad z \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

il en résulte qu'au complexe (C) des droites équidistantes de deux points correspondent deux complexes (C′) : l'un est le complexe linéaire spécial attaché à la droite à l'infini du plan Oxy et l'autre le complexe linéaire spécial attaché à l'axe Oz, résultats dont il est possible de se rendre compte géométriquement.

3. Cela étant, considérons un complexe (C) quel-

conque, mais qui puisse être associé à un complexe (C'), et soit (S) une surface, supposée réfléchissante, dont les normales appartiennent au complexe (C'). De la définition même du complexe (C'), il résulte que le complexe (C) est invariant par réflexion sur la surface (S).

Une congruence de normales quelconque de (C) se réfléchira, dans les mêmes conditions, suivant une congruence, distincte ou non de la congruence primitive, mais qui sera une congruence de normales, en vertu du théorème de Malus.

Supposons maintenant que le problème de Transon soit résolu pour le complexe (C') et que l'on connaisse une solution unique du même problème pour le complexe (C). Le théorème fondamental de M. Darboux qui permet d'obtenir toutes les congruences de normales d'un complexe donné, dès qu'une famille de solutions est connue, est inapplicable, en général, au cas où une solution unique est connue *a priori*. Il est remarquable que, dans le cas actuel, toutes les congruences de normales de (C) soient déterminables lorsqu'une d'elles est donnée.

La congruence de normales donnée ne sera certainement pas, en effet, invariante dans toutes les réflexions sur les diverses surfaces dont les normales appartiennent au complexe (C'). On pourra alors déterminer ainsi toutes les congruences de normales de (C) ou tout ou moins une infinité de telles congruences, ce qui est suffisant pour pouvoir appliquer le théorème de M. Darboux. Ainsi donc : *Lorsque, le problème de Transon étant résolu pour le complexe* (C'), *on connaît une congruence de normales du complexe* (C), *le problème de Transon est résoluble pour le dernier complexe.*

Le théorème précédent met en évidence l'intérêt qu'il y aurait à connaître ceux des complexes quadratiques (C) qui conduisent à des complexes (C') simples ou remarquables, et à chercher si, parmi les complexes d'ordre supérieur, il existe des complexes dont tous les cônes soient doués d'axes de symétrie binaire ou, plus généralement, d'axes de symétrie quelconque.