G. VALIRON

Note sur la règle de Duhamel

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 137-140

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__137_1>

[D2aα]

NOTE SUR LA RÈGLE DE DUHAMEL;

PAR M. G. VALIRON.

1. Considérons une série à termes positifs dans laquelle le rapport d'un terme au précédent a pour

limite un, et posons

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \alpha_n.$$

La quantité α_n a pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment. Nous aurons

$$u_n = \frac{u_{n_0}}{(1+\alpha_{n_0})\ldots(1+\alpha_n)},$$

et l'on voit que si la série $\Sigma|\alpha_n|$ converge, le produit qui est un dénominateur reste fini, u_n ne tend pas vers zéro, la série u_n est divergente.

Supposons donc que la série $\Sigma|\alpha_n|$ diverge, mais que la série $\Sigma\alpha_n^2$ converge ; nous pourrons écrire en posant $e(x) = e^x$

$$u_n = \frac{u_{n_0}}{e\left(\sum_{n_0}^{n}\alpha_n\right)\prod_{n_0}^{n}(1+\alpha_n)\,e^{-\alpha_n}}.$$

L'hypothèse faite sur $\Sigma\alpha_n^2$ entraîne la convergence du produit infini qui est en dénominateur et par suite les séries de termes généraux u_n et $e\left(-\sum_{x_0}^{n}\alpha_n\right)$ convergent ou divergent en même temps. Si l'on remarque que la série $e\left(-\sum_{n_0}^{n}\alpha_n\right)$ diverge lorsque la série $\Sigma|\alpha_n|$ converge (puisque le terme général reste fini), on a le résultat suivant :

La série u_n converge ou diverge suivant que la série $v_n = e\left(-\sum_{n_0}^{n}\alpha_n\right)$ converge ou diverge (toutes les fois que la série $\Sigma\alpha_n^2$ converge).

2. Supposons en particulier toutes les quantités α_n

positives, et décroissantes, et soit $\alpha(x)$ une fonction continue décroissante égale à α_n pour $x = n$. On sait qu'on a

$$\sum_{n_0+1}^{n} \alpha_n < \int_{n_0}^{n} \alpha(x)\,dx < \sum_{n_0}^{n-1} \alpha_n,$$

et, par conséquent, en posant $w_n = e\left(-\int_{n_0}^{n} \alpha(x)\,dx\right)$,

$$v_{n-1} < w_n < v_n\, e^{\alpha_{n_0}},$$

ce qui montre que les séries de termes w_n et v_n convergent ou divergent en même temps, donc aussi les séries w_n et v_n.

On a ainsi la proposition suivante :

En supposant que la série $\Sigma\alpha_n^2$ soit convergente, la série u_n converge ou diverge suivant que la série de terme général $w_n = e\left(-\int_{n_0}^{n} \alpha(x)\,dx\right)$ converge ou diverge.

On retrouve ainsi la règle de Duhamel et les critères de deuxième espèce de Bertrand.

1° Si $\alpha_n = \frac{k}{n}$, on aura

$$w_n = \frac{A}{n^k};$$

la série u_n converge si $k > 1$, diverge si $k \leqq 1$. *A fortiori*, si $n\alpha_n > k > 1$, la série converge et diverge si $n\alpha_n \leqq 1$.

2° Prenons

$$\alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n\log n} + \ldots + \frac{k}{n\log n\ldots(\log_\rho n)},$$

on aura

$$w_n = \frac{A}{n(\log n)\ldots(\log_\rho n)^k},$$

série qui converge pour $k > 1$, diverge pour $k \leqq 1$. On obtient les critères de Bertrand.

3° Le résultat du n° 1 montre que si l'on a

$$\alpha_n = \frac{1 + \beta_n}{n},$$

la série u_n diverge si la série $\sum \frac{\beta_n}{n}$ converge.