

G. VALIRON

Note sur les séries alternées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 136-137

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__136_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[D2b]

NOTE SUR LES SÉRIES ALTERNÉES ;

PAR M. G. VALIRON.

Considérons une série alternée

$$a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n + \dots$$

dont les termes décroissent en valeur absolue à partir d'un certain rang, et supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la série converge est que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Écrivons alors

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \alpha_n \quad (\alpha_n > 0 \text{ d'après ce qui précède}).$$

La série alternée converge ou diverge suivant que la série dont le terme général est α_n diverge ou converge.

En effet, on a

$$a_{n+p} = \frac{a_n}{(1 + \alpha_n)(1 + \alpha_{n+1}) \dots (1 + \alpha_{n+p-1})},$$

d'où

$$a_{n+p} < \frac{a_n}{1 - (\alpha_n + \alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p-1})}$$

et par conséquent, si $\Sigma \alpha_n$ diverge, le dénominateur croît indéfiniment a_{n+p} tend vers zéro.

De même, on peut écrire

$$\begin{aligned} a_{n+p} &= a_n \left(1 - \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n} \right) \dots \left(1 - \frac{\alpha_{n+p-1}}{1 + \alpha_{n+p-1}} \right) \\ &> a_n \left[1 - \left(\frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n} + \dots + \frac{\alpha_{n+p-1}}{1 + \alpha_{n+p-1}} \right) \right] \end{aligned}$$

Si la série α_n converge, la série $\frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n}$ converge *a fortiori* et par conséquent on peut trouver n assez grand pour que

$$\frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n} + \dots + \frac{\alpha_{n+p-1}}{1 + \alpha_{n+p-1}} < \varepsilon,$$

quel que soit p , et ε étant arbitrairement petit. Il suit de là

$$a_{n+p} > a_n(1 - \varepsilon),$$

quel que soit p . a_{n+p} ne tend pas vers zéro, la série diverge.

Le théorème est donc démontré.

Cas particuliers. — Si l'on a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\lambda(1 - \varepsilon_n)}{n} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \lambda > 0 \right),$$

la série converge (elle est absolument convergente pour $\lambda > 1$ d'après la règle de Duhamel, et diverge pour $\lambda < 0$).

Si

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\lambda(1 - \varepsilon_n)}{n(\log n)^{1+\alpha}} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \lambda > 0 \right),$$

la série converge pour $0 < \alpha \leq 1$ (non absolument) et diverge pour $\alpha > 1$, etc.