E. KERAVAL

Surfaces partiellement cylindroïdes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 529-568

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__529_0>

[M²7b]

SURFACES PARTIELLEMENT CYLINDROIDES [1] ;

PAR M. E. KERAVAL,
Professeur au Lycée Louis-le-Grand.

Surfaces à plan directeur.

Il s'est glissé une erreur dans l'équation de ces surfaces qu'on obtient en éliminant t entre

$$y = tx - kt^2$$

et

$$z = \frac{at^3 + bt^2 + ct}{1 + t^2},$$

et non pas

$$z = \frac{at^3 + bt^2 + c}{1 + t^2}.$$

Les points de Cayley forment un cylindre de résolution sur lequel est tracée la courbe nodale de la surface ; cette courbe est une cubique gauche. En étudiant la question qui est facile, j'ai été conduit au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans un plan* P *on considère deux paraboles de foyers* F, F′, *de directrices* Δ, Δ′. *Elles ont à distance finie trois tangentes communes qui forment un triangle* ABC. *Le cercle circonscrit de ce triangle reste fixe lorsqu'on déplace chacune des directrices parallèlement à elle-même, sans toucher aux foyers.*

---

[1] *Voir* l'article du même titre (*Nouvelles Annales*, 4e série, t. X, 1910, p. 49).

Il est facile de voir ce que devient le théorème si Δ est parallèle à Δ'.

Je reprends maintenant la suite de mon article précédent.

Étude des surfaces S_6.

Elles proviennent de la décomposition des S_9 en un cylindroïde et une surface du sixième degré. La catégorie la plus intéressante de ces surfaces me sera fournie par l'étude d'une congruence que je vais commencer par définir et qui est liée d'une façon étroite à la famille de Lamé trouvée par M. G. Humbert (*Systèmes orthogonaux*, par G. Darboux, p. 100, 101, ...).

Définition d'une congruence h, k, l.

J'appelle ainsi une congruence définie par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho &= hYZ, \\ \rho' &= kZX, \\ \rho'' &= l\,XY; \end{aligned}\right.$$

h, k, l sont trois nombres choisis arbitrairement pourvu que

$$h + k + l = 0.$$

Je rappelle les notations que j'ai adoptées. Si X, Y, Z, L, M, N sont les six coordonnées de la droite, j'ai posé

$$\begin{aligned} \rho &= NY - MZ, \\ \rho' &= LZ - NX, \\ \rho'' &= MX - LY. \end{aligned}$$

Les égalités (1) me donnent bien comme cela doit être

$$\rho X + \rho' Y + \rho'' Z = 0.$$

Je commence par chercher les points de Cayley de cette congruence, c'est-à-dire un point xyz tel que si de ce point j'abaisse des perpendiculaires sur les droites de la congruenee les pieds soient dans un plan

$$Px + Qy + Rz + S = 0.$$

En appliquant le procédé que j'ai déjà indiqué, on trouve, pour déterminer le point de Cayley xyz et le plan correspondant, les six équations

$$\begin{gathered} S + Px = 0, \\ S + Qy = 0, \\ S + Rz = 0, \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} hP + Qz + Ry &= 0, \\ kQ + Rx + Pz &= 0, \\ lR + Py + Qx &= 0. \end{aligned}$$

Finalement on trouve dix points de Cayley : les quatre sommets A, B, C, D d'un tétraèdre et les milieux des six arêtes. Les arêtes opposées de ce tétraèdre sont égales; les perpendiculaires communes à deux arêtes opposées passent par les milieux de ces arêtes, ce sont les axes de coordonnées. Si, pour fixer les idées, on suppose $h > 0$, $k < 0$, $l < 0$, ces quatre points A, B, C, D ont pour coordonnées

$$\begin{array}{llll} (\mathrm{A}) & \sqrt{kl}, & i\sqrt{-hl}, & -i\sqrt{-hk}, \\ (\mathrm{B}) & \sqrt{kl}, & -i\sqrt{-hl}, & +i\sqrt{-hk}, \\ (\mathrm{C}) & -\sqrt{kl}, & i\sqrt{-hl}, & i\sqrt{-hk}, \\ (\mathrm{D}) & -\sqrt{kl}, & -i\sqrt{-hl}, & -i\sqrt{-hk}; \end{array}$$

les droites AB, CD sont réelles, les autres arêtes sont imaginaires.

Comme points de Cayley réels, nous trouvons :

Le point

(E) $x = +\sqrt{kl}, \quad y = 0, \quad z = 0,$

(P_E) $\frac{z}{y} = -\sqrt{\frac{l}{k}},$

et le point

(F) $x = -\sqrt{kl}, \quad y = 0, \quad z = 0,$

(P_F) $\frac{z}{y} = +\sqrt{\frac{l}{k}}.$

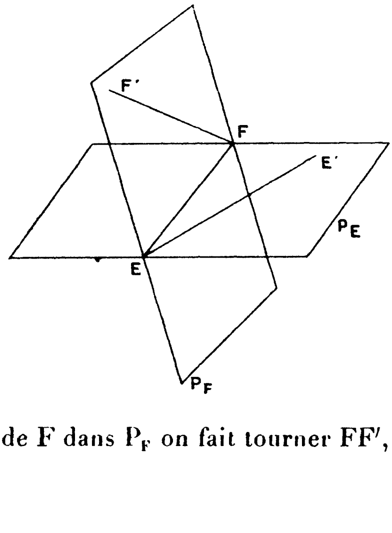
Ces éléments réels vont me permettre de donner une définition géométrique très simple d'une congruence hkl.

Première définition géométrique d'une congruence hkl et de sa conjuguée.

On considère deux plans sécants P_E, P_F et sur leur intersection deux points E, F.

Autour de E dans P_E on fait tourner EE'.

Fig. 1.



Autour de F dans P_F on fait tourner FF', la perpendiculaire commune à ces deux droites décrit la congruence.

Pour avoir ce que j'appellerai la *congruence conjuguée*, on associera E avec P_F et F avec P_E.

Nous allons retrouver cette congruence *hkl* d'une tout autre façon.

Famille de Lamé de M. G. Humbert.

(*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1890.)

En cherchant les surfaces réglées qui possèdent des points de Cayley formant une ligne droite, j'ai trouvé que ces points formaient six droites pour chaque système des génératrices dans le cas des hyperboloïdes. J'ai alors cherché l'équation générale des hyperboloïdes ayant les mêmes droites de Cayley et j'ai trouvé l'équation suivante où u désigne un paramètre variable :

$$\frac{x^2}{(u+\beta)(u+\gamma)} + \frac{y^2}{(u+\gamma)(u+\alpha)} + \frac{z^2}{(u+\alpha)(u+\beta)} + 1 = 0.$$

C'est bien la famille de Lamé de M. G. Humbert. Si l'on suppose

$$\gamma < \alpha < \beta,$$

α, β, γ étant positifs, on a un hyperboloïde u variant de $-\beta$ à $-\gamma$. Les droites de Cayley RÉELLES sont pour l'un des systèmes de génératrices

$$x = +\sqrt{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)},$$
$$\frac{y}{z} = -\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\gamma}}$$

et

$$x = -\sqrt{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)},$$
$$\frac{y}{z} = +\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\gamma}},$$

qui naturellement ne changent pas si l'on change α, β, γ en $\alpha+\lambda$, $\beta+\lambda$, $\gamma+\lambda$.

Il y a en tout six droites de Cayley qui forment les six arêtes d'un tétraèdre ABCD analogue à celui dont j'ai parlé plus haut. On peut définir ces six droites de la façon suivante:

Ce sont les perpendiculaires communes aux génératrices isotropes ou encore les perpendiculaires aux plans cycliques menées par les foyers du contour apparent de la surface sur les plans cycliques centraux. Les quatre sommets ABCD jouent un rôle spécial : si par l'un d'eux on mène des perpendiculaires aux génératrices, les pieds sont en ligne droite pour chaque hyperboloïde. Pour tout autre point d'une droite de Cayley, les pieds sont sur un cercle de la quadrique.

Deuxième définition de la congruence *hkl*.

J'appelle H_u les hyperboloïdes d'Humbert

$$\frac{x^2}{(u+\beta)(u+\gamma)}+\frac{y^2}{(u+\gamma)(u+\alpha)}+\frac{z^2}{(u+\alpha)(u+\beta)}+1=0.$$

D'après ce qui précède j'aurai évidemment une congruence *hkl* en envisageant les génératrices d'un même système de tous ces hyperboloïdes. C'est ce que je vais vérifier directement. Je pose pour abréger

$$(u+\beta)(u+\gamma)=\mathrm{A},\quad (u+\gamma)(u+\alpha)=\mathrm{B},\quad (u+\alpha)(u+\beta)=\mathrm{C}.$$

Pour que la droite $x=az+p$, $y=bz+q$ soit sur la surface, il faut trois conditions qui, résolues en A, B, C, donnent

$$\mathrm{A}=\frac{p(aq-bp)}{b},\qquad \mathrm{B}=\frac{q(aq-bp)}{-a},\qquad \mathrm{C}=-\frac{pq}{ab};$$

d'où

$$(u+\alpha)^2 = \frac{q^2}{a^2}.$$

Si, par exemple, on adopte

$$u+\alpha = -\frac{q}{a},$$

on trouve

$$\beta-\alpha = \frac{ap+bq}{ab},$$

$$\gamma-\beta = aq-bp-\frac{p}{b},$$

$$\alpha-\gamma = bp-aq-\frac{q}{a};$$

d'où

$$\rho = (\beta-\gamma)b,$$
$$\rho' = (\gamma-\alpha)a,$$
$$\rho'' = (\alpha-\beta)ab,$$

ou, avec d'autres notations,

$$\rho = (\beta-\gamma)\mathrm{YZ},$$
$$\rho' = (\gamma-\alpha)\mathrm{ZX},$$
$$\rho'' = (\alpha-\beta)\mathrm{XY}.$$

Donc il suffit de poser

$$h = \beta-\gamma, \qquad k = \gamma-\alpha, \qquad l = \alpha-\beta;$$

on a du reste

$$h+k+l = 0.$$

La congruence conjuguée $(-h, -k, -l)$ est formée des génératrices de l'autre système.

J'aurai encore à utiliser une autre définition de la congruence hkl. Pour cela j'énoncerai le théorème suivant, bien facile à vérifier :

Théorème. — *On considère un hyperboloïde réglé* H *et une génératrice fixe* G *de* H. *Soient* G' *une géné-*

ratrice mobile du même système et AB *la perpendiculaire commune à* GG′:

1° AB décrit un cylindroïde d'axe G dont l'une des génératrices est la perpendiculaire à G menée par le point central dans le plan central;

2° Ce cylindroïde coupe H suivant une conique qui se projette suivant un cercle sur un plan perpendiculaire à G. Cette ellipse est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées sur les génératrices du cylindroïde de tous les points de la génératrice G_1 parallèle à G.

Considérons maintenant une des surfaces H_u et sur elle une génératrice G′ du deuxième système, elle coupe sa sphère de Monge en deux points M et N par lesquels il passe une génératrice du premier système. Donc G′ est la perpendiculaire commune à deux génératrices de ce premier système. D'où....

Troisième définition d'une congruence *hkl*.

On considère un hyperboloïde H et les génératrices de l'un des systèmes; les perpendiculaires communes à ces génératrices prises deux à deux forment une congruence *hkl* qui reste la même si l'on remplace H par un quelconque des hyperboloïdes ayant les mêmes droites de Cayley.

Ordre et classe de la congruence hkl. — Si l'on se reporte à la première définition au moyen des deux complexes EP_E, FP_F, on voit qu'il faut laisser de côté les droites qui coupent EF orthogonalement.

Ceci admis, il est facile de vérifier que l'ordre est 3 et la classe 2. Cette congruence jouit de la propriété remarquable suivante :

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ.

Théorème. — *Toute surface équatoriale d'une congruence hkl (c'est-à-dire l'ensemble des droites de la congruence parallèles à un plan donné) est un cylindroïde.*

En cherchant les conditions pour que la droite $x = az + p$, $y = bz + q$ soit sur H_u, nous avons trouvé des relations qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} p &= b(u+\beta), \\ q &= -a(u+\alpha), \\ aq - bp &= u + \gamma; \end{aligned}$$

d'où

$$u = -\frac{a^2\alpha + b^2\beta + \gamma}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Si donc on se donne a, b, c'est-à-dire la direction de la droite u, par suite H_u est déterminé et les relations précédentes donnent p, q.

Si l'on veut les droites de la congruence parallèles à un plan P, on cherche la droite Δ appartenant à la congruence, qui est perpendiculaire à P et conjuguée sur le H_u dont elle fait partie, on prend les perpendiculaires communes à Δ et aux génératrices du même système, on a le cylindroïde de l'énoncé.

SECONDE PROPRIÉTÉ.

Théorème. — *Par un point* M *de l'espace passent trois droites* G_1, G_2, G_3 *de la première congruence et trois droites* G'_1, G'_2, G'_3 *de la congruence conjuguée :*

1° Les deux trièdres $G_1 G_2 G_3$ et $G'_1 G'_2 G'_3$ sont supplémentaires ;

2° Les plans $G_1 G'_1$, $G_2 G'_2$, $G_3 G'_3$ passent par une même droite ; donc

3° Par l'intersection de deux surfaces H_u, il en passe une troisième.

La première partie résulte de la considération du cylindroïde formé par les perpendiculaires communes à G_1 et aux génératrices de même système sur une H_u, les deux autres résultant de la première ; du reste la troisième est facile à vérifier directement.

Surface focale d'une congruence *hkl*.
Surface médiane. — Surface centrale.

La surface focale s'obtient en cherchant l'enveloppe de H_u lorsque u varie. On est amené à éliminer u entre les deux équations

$$x^2 + y^2 + z^2 + \mu = -3u^2 - 6\lambda u,$$
$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \nu = +2u^3 + 3\lambda u^2;$$

on a posé pour abréger

$$\alpha + \beta + \gamma = 3\lambda, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \mu, \qquad \alpha\beta\gamma = \nu.$$

Or la première équation est la sphère de Monge de H_u : donc les points focaux d'une droite de la congruence sont les points où cette droite coupe le H_u dont elle fait partie. Il en résulte que ces deux foyers F et F' sont équidistants de l'origine. Donc :

1° La surface médiane (notations Guichard ; *voir*, par exemple, *Comptes rendus*, 1891, p. 1425 et suiv.), c'est-à-dire le lieu du milieu de FF', coïncide avec le lieu du pied K de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite : c'est une surface de Steiner ;

2° La surface centrale, c'est-à-dire l'enveloppe du plan mené par k perpendiculairement à la droite, est réduite au point O.

La surface focale a pour équation

$$4(x^2+y^2+z^2+\mu-3\lambda^2)^2$$
$$+27[\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2-\lambda(x^2+y^2+z^2+\mu)+2\lambda^3+\nu]=0.$$

Cette surface est fort intéressante. Je me contenterai d'indiquer l'une de ses propriétés :

Théorème. — *La surface focale d'une congruence hkl possède six cercles de contact* (c'est-à-dire tout le long desquels le plan du cercle est tangent à la surface; la surface des ondes a par exemple quatre cercles de contact).

Les équations écrites plus haut prouvent que la surface focale est le lieu d'une conique sphérique. La considération des plans cycliques du cône

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=0$$

m'amène à mettre les équations précédentes sous trois formes. Chacune de ces formes me donne deux cercles de contact. Si comme plus haut je suppose $\gamma<\alpha<\beta$ et $\alpha, \beta, \gamma>0$ la forme qui donne les cercles réels est la suivante :

$$x^2+y^2+z^2+\mu=-3u^2-6\lambda u,$$
$$(\beta-\alpha)y^2+(\gamma-\alpha)z^2=(u+\alpha)^2(2u+\beta+\gamma).$$

Pour $u=-\alpha$ on a deux cercles réels perpendiculaires aux droites de Cayley de H_u. Le plan d'un de ces cercles coupe la surface suivant ce cercle compté deux fois, plus un autre cercle.

Surfaces de Steiner.

Ces surfaces du quatrième degré étudiées par Weierstrass, Cayley, Cremona, etc. (voir *Journal de Crelle*, t. **63-64** par exemple) possèdent trois droites doubles concourantes et quatre coniques *de contact* situées sur une même quadrique. Il en résulte que tout plan tangent coupe la surface suivant deux coniques. Toutes ces propriétés se déduisent bien facilement de l'étude d'une congruence hkl. Soit M un point quelconque de coordonnées α, β, γ. Si de ce point on abaisse une perpendiculaire sur les droites de la congruence

$$\begin{aligned} \rho &= hYZ, \\ \rho' &= kZX, \\ \rho'' &= lXY, \end{aligned}$$

les coordonnées x, y, z du pied sont données par les formules

$$\begin{aligned} x &= \frac{hYZ + X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 - Y^2 + Z^2}, \\ y &= \frac{kZX + Y(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ z &= \frac{lXY + Z(\alpha X + \beta Y - \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \end{aligned}$$

qui définissent une surface de Steiner en coordonnées $u = \frac{X}{Z}$, $v = \frac{Y}{Z}$ par exemple.

Les droites de la congruence peuvent être groupées en cylindroïdes et les axes de ces cylindroïdes forment la congruence conjuguée : il y a trois de ces axes qui passent par M : ce sont évidemment les trois droites doubles de la surface de Steiner. D'où la propriété des plans tangents. Du reste les ellipses tracées sur la surface s'obtiennent au moyen des cylindroïdes.

Pour la dernière propriété je supposerai α, β, γ nuls, mais il est bien facile de généraliser. La surface de Steiner est alors

$$x = \frac{hYZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad y = \frac{kZX}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad z = \frac{lXY}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Coupons cette surface par le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Il faudra prendre les droites de la congruence parallèles aux génératrices du cône

$$AhYZ + BkZX + ClXY + D(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Si le plan se déplace parallèlement à lui-même, c'est-à-dire si A, B, C restant fixes on fait varier D, le cône se décomposera trois fois en deux plans, les droites correspondantes donneront deux cylindroïdes, donc les plans correspondants donneront deux ellipses : ainsi trois plans tangents parallèles à un plan donné. Mais si le cône est de révolution, dans le cas limite les deux ellipses seront confondues et l'on aura une ellipse *de contact*. Il s'agit donc de chercher les cônes de révolution de la forme

$$AhYZ + BkZX + ClXY = 0,$$

c'est-à-dire passant par les trois axes de coordonnées. Or, par trois droites formant un trièdre, on peut faire passer quatre cônes de révolution : on a donc bien quatre ellipses de contact.

Transformation birationnelle faisant correspondre une sphère et une surface de Steiner.

Les considérations qui précèdent m'ont conduit à des transformations birationnelles faisant correspondre une sphère et une surface de Steiner. Exemple :

$$x' = \frac{y}{k}, \qquad x = hy',$$

$$y' = \frac{x}{h}, \qquad y = kx',$$

$$z' = \frac{lxy}{hkz}, \qquad z = \frac{lx'y'}{z'}.$$

Si le point (x', y', z') décrit la sphère

$$(\Sigma) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2z' = 0,$$

le point, x, y, z, décrit la surface de Steiner

$$(\mathrm{S}) \qquad hy^2z^2 + kz^2x^2 + lz^2y^2 - 2hklxyz = 0.$$

Il existe quatre cônes de révolution contenant Ox, Oy, Oz. Pour obtenir les plans des coniques de contact il faut envisager l'intersection de Σ par un de ces quatre cônes.

A une section plane de S correspond sur Σ l'intersection d'un cône ayant son sommet à l'origine et de Σ. Si le plan est tangent à S, ce cône se décompose. Etc.

Surfaces S_6 qui correspondent à une congruence *hkl*.

Ayant choisi les nombres h, k, l tels que $h + k + l = 0$, on aura une surface S_6 en envisageant les droites de cette congruence qui sont parallèles aux génératrices d'un cône du deuxième degré

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy = 0.$$

Si l'on cherche les points de Cayley de la surface, on trouve une sextique, intersection de deux surfaces du troisième degré. Cette intersection se décompose en une cubique qui ne convient pas et la sextique. J'ajoute que cette sextique ne change pas si l'on remplace le cône par un cône homocyclique.

Pour simplifier un peu l'écriture je m'en tiendrai au cas d'un cône de la forme

$$(C) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Les équations de la surface S_6 sont alors

$$x = az + \frac{b(h - a^2 l)}{a^2 + b^2 + 1},$$
$$y = bz + \frac{a(k - b^2 l)}{a^2 + b^2 + 1},$$
$$Aa^2 + Bb^2 + C = 0;$$

c'est-à-dire qu'on aura l'équation de cette surface en éliminant a, b.

Soient (x, y, z) un point de Cayley et

$$Px + Qy + Rz + S = 0$$

le plan correspondant. On doit avoir

$$PhYZ + QkZX + RlXY + S(X^2 + Y^2 + Z^2)$$
$$+ (xX + yY + zZ)(PX + QY + RZ) \equiv \lambda(AX^2 + BY^2 + CZ^2),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} S + Px &= \lambda A, & Ph + Ry + Qz &= 0, \\ S + Qy &= \lambda B, & Qk + Pz + Rx &= 0, \\ S + Rz &= \lambda C, & Rl + Qx + Py &= 0. \end{aligned}$$

Donc dans l'abaque

$$\begin{vmatrix} h & z & y & (B - C)x \\ z & k & x & (C - A)y \\ y & x & l & (A - B)z \end{vmatrix},$$

il faut annuler deux déterminants à trois colonnes, par exemple

$$(\mathrm{S})\qquad \begin{vmatrix} h & z & y \\ z & k & x \\ y & x & l \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\mathrm{S}')\qquad \begin{vmatrix} h & z & y \\ z & k & x \\ (\mathrm{B}-\mathrm{C})x & (\mathrm{C}-\mathrm{A})y & (\mathrm{A}-\mathrm{B})z \end{vmatrix} = 0.$$

Si je prends $h > 0$, $k < 0$, $l < 0$, ces deux surfaces ont trois droites communes qui ne comptent pas: la droite de l'infini du plan $z = 0$ et

$$z = \varepsilon i\sqrt{-hk}$$
$$\frac{y}{x} = -\varepsilon i\sqrt{-\frac{h}{k}} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Reste la sextique annoncée qui admet Ox, Oy, Oz comme axes de symétrie. Nous verrons plus loin qu'elle a six directions asymptotiques qui sont perpendiculaires aux plans cycliques du cône (C).

Courbe nodale de S_6. — Si l'on prend un point A sur la sextique et que de ce point on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices de S_6, les pieds sont dans un plan P_A qui coupe S_6 suivant une courbe du quatrième degré tracée sur la surface de Steiner qui correspond à A et en outre suivant deux droites : le point de rencontre de ces deux droites décrit la courbe nodale que j'ai pu déterminer dans certains cas particuliers; je donnerai des exemples où elle se compose de trois coniques.

Conditions de décomposition de la sextique.

Il faut s'assurer qu'en général cette sextique ne se décompose pas; il est facile de trouver tous les cas de décomposition. Je reprends les six équations en x, y, z, P, Q, R, S. Les trois dernières me donnent les équations de la surface (S) en coordonnées $u = \frac{P}{R}$, $v = \frac{Q}{R}$

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{P(hP^2 - kQ^2 - lR^2)}{2PQR}, \\ y &= \frac{Q(kQ^2 - hP^2 - lR^2)}{2PQR}, \\ z &= \frac{R(lR^2 - hP^2 - kQ^2)}{2PQR}. \end{aligned} \right.$$

En portant dans l'équation

$$P(B - C)x + Q(C - A)y + R(A - B)z = 0,$$

on trouve la condition

$$(2) \quad \begin{aligned} &(B - C)P^2(hP^2 - kQ^2 - lR^2) \\ &+ (C - A)Q^2(kQ^2 - lR^2 - hP^2) \\ &+ (A - B)R^2(lR^2 - hP^2 - kQ^2) = 0. \end{aligned}$$

Si le point (P, Q, R) décrit la quartique (2) le point (x, y, z) donné par (1) décrit la sextique tracée sur (S). Pour que la sextique se décompose, il faut et il suffit que (2) se décompose.

Or on a un polynome bicarré en P; l'étude est donc facile et l'on trouve :

Premier cas de décomposition. — La sextique se décompose en une quartique et une conique si l'une des conditions suivantes est remplie :

$$\begin{aligned} l(B - C) + h(A - B) &= 0, \\ h(C - A) + k(B - C) &= 0, \\ k(A - B) + l(C - A) &= 0. \end{aligned}$$

Exemple numérique :

$$h = 2, \qquad k = 1, \qquad l = -3.$$

Pour

$$h(C - A) + k(B - C) = 0,$$

on trouve la conique

$$z = 0, \qquad 2x^2 + y^2 + 6 = 0,$$

qui est imaginaire et la quartique

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 + z^2 - 2 &= 0, \\ xyz + y^2 - 4x^2 &= 0, \end{aligned}$$

qui ont deux droites communes

$$\left.\begin{aligned} y &= \varepsilon x\sqrt{2} \\ z &= \varepsilon\sqrt{2} \end{aligned}\right. \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Je laisse de côté le cas où deux des nombres h, k, l sont égaux; dans ce cas on peut avoir trois coniques : un cercle et deux paraboles.

Deuxième cas de décomposition. — Ce cas correspond à la condition

$$Ah + Bk + Cl = 0,$$

ou bien

$$\frac{h}{C - B} = \frac{k}{A - C} = \frac{l}{B - A},$$

c'est-à-dire que le cône (C) doit avoir pour plans cycliques

$$\frac{x^2}{h} = \frac{y^2}{k}, \qquad \frac{y^2}{k} = \frac{z^2}{l}, \qquad \frac{z^2}{l} = \frac{x^2}{h}.$$

Dans ce cas-là la surface peut s'écrire

$$\begin{aligned} x &= az - \frac{Bh}{B - C} b, \\ y &= bz - \frac{Ah}{B - C} a, \\ Aa^2 &+ Bb^2 + C = 0. \end{aligned}$$

En éliminant ab, on trouve

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \frac{ABC}{(B-C)^2} h^2 = 0,$$

et la sextique se décompose en six droites. La surface (S)

$$(S) \qquad 2xyz - (hx^2 + ky^2 + lz^2) + hkl = 0$$

possède six droites à distance finie : deux parallèles à chacun des plans de coordonnées. Par exemple

$$z^2 = hk,$$
$$hx = yz,$$

ou

$$z = \varepsilon\sqrt{hk}$$
$$\frac{y}{x} = \frac{h}{z} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Ces six droites appartiennent à S'.

Si l'on considère l'hyperboloïde habituel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

avec $a > b$, les six droites de Cayley forment un tétraèdre comme celui dont j'ai parlé tout au début. Deux arêtes opposées sont réelles et ont pour équations

$$x = \varepsilon \frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+c^2)}}{a}$$
$$\frac{y}{x} = \frac{-acx}{b(a^2+c^2)} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Les plans de Cayley correspondants sont les plans cycliques. Ces six droites de Cayley sont les perpendiculaires communes aux génératrices isotropes.

Soit Δ une de ces droites ; elle est perpendiculaire à un plan cyclique. Si par un point A de Δ on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices du système considéré, les pieds sont sur un cercle de la quadrique dont le plan n'est pas parallèle au premier plan cyclique considéré.

Cas particulier des hyperboloïdes rectangles. — Il peut arriver que les droites de Cayley soient des génératrices de l'hyperboloïde.

Ceci se produit pour les hyperboloïdes que j'appellerai *rectangles* et qui sont engendrés par la droite d'intersection de deux plans rectangulaires tournant respectivement autour de deux droites Δ, Δ'. Ces droites Δ, Δ' sont précisément des droites de Cayley : ici la propriété devient évidente. Pour que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ soit rectangle si $a > b$, il faut et il suffit que

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Directions asymptotiques des sextiques de Cayley.

Lemme. — *Soit* O *le point de l'axe du cylindroïde où se croisent deux génératrices rectangulaires qui forment avec l'axe un trièdre trirectangle. Si un point* M *s'éloigne à l'infini sur une droite* λ, P_M *devient* P *perpendiculaire à l'axe. Pour obtenir ce plan on mène par l'axe le plan parallèle à* λ, *il coupe le cylindroïde suivant une génératrice qui coupe l'axe en un point* A. P *passe par* B *symétrique de* A *par rapport à* O.

Je ne donne pas la démonstration, qui est immédiate.

Théorème. — *Les directions asymptotiques d'une sextique de Cayley correspondant à une* S_6 *d'une* *congruence hkl sont les six perpendiculaires aux plans cycliques du cône choisi. La sextique ne change pas si l'on remplace le cône par un cône homocyclique; on peut donc le prendre évanouissant, mais alors le* S_6 *se décompose en deux cylindroïdes ayant une génératrice commune, la perpendiculaire commune à leurs axes.*

Soient μ, μ' les axes de ces deux cylindroïdes; O, le point dont j'ai parlé plus haut situé sur l'axe du premier : CD la perpendiculaire commune à μ et à μ'. Le plan P perpendiculaire à μ et passant par CD est tangent au deuxième cylindroïde. Il existe donc une droite Δ parallèle à μ' et telle que, pour tout point A de Δ, P_A soit confondu avec P.

Si A va à l'infini sur Δ, P_A ne change pas dans le premier cylindroïde et tend vers P dans le deuxième. Donc....

Surfaces réglées réciproques.

Soient S une surface réglée, Δ une génératrice, Δ' la perpendiculaire à Δ menée dans le plan tangent au point central O et passant par ce point. Δ' décrit une deuxième surface que j'appelle *réciproque* de la première. Je vais faire voir que le point O décrit la ligne de striction commune aux deux surfaces qui sont tangentes tout le long de cette ligne de striction. Adoptons la méthode dont M. Darboux s'est servi si souvent dans sa théorie des surfaces et soit $Oxyz$ le trièdre mobile $Oz \equiv \Delta$, $Ox \equiv \Delta'$. Les projections de la vitesse d'un point (lié au trièdre) sur les axes mobiles sont avec les notations habituelles :

$$V_x = \xi + qz - ry,$$
$$V_y = \eta + rx - pz,$$
$$V_z = \zeta + py - qx.$$

Pour un point de Oz

$$V_x = \xi + qz,$$
$$V_y = \eta - pz,$$
$$V_z = \zeta.$$

On en déduit l'équation du plan tangent à S en un point de Oz et en écrivant que O est le point central et zOx le plan central, on trouve

$$q = 0, \qquad \eta = 0,$$

et réciproquement.

On en déduit que deux droites rectangulaires quelconques se croisant en O dans le plan zOx décrivent deux surfaces réglées réciproques.

Surfaces réglées réciproques des quadriques.

Soit S une quadrique sur laquelle on n'envisage qu'un système de génératrices. Soit S' sa réciproque. Je dis que c'est une des surfaces S_6 définies plus haut. En effet, considérons la congruence hkl formée par les perpendiculaires communes aux génératrices considérées de S : les génératrices de S' en font partie. En outre, elles sont parallèles aux génératrices du cône réciproque du cône asymptote de S. Ceci démontre la proposition.

Autres surfaces S_6.

Elles proviennent de la décomposition des S_9 et il est facile de voir qu'on les obtient en posant

$$\rho = \varphi(X, Y, Z),$$
$$\rho' = \varphi'(X, Y, Z),$$
$$\rho'' = \varphi''(X, Y, Z);$$

φ, φ', φ'' étant trois fonctions homogènes et du deuxième degré telles que, ou bien

$$X\varphi + Y\varphi' + Z\varphi'' \equiv 0,$$

on obtient alors les surfaces étudiées plus haut; ou bien

$$X\varphi + Y\varphi' + Z\varphi'' \equiv P\Phi,$$

P étant linéaire et Φ du deuxième degré. Il faut alors prendre

$$\Phi(X, Y, Z) = 0$$

pour cône directeur de la surface.

Pour ne pas trop allonger cet article, je me contenterai d'indiquer deux exemples numériques qui conduisent à des cas de décomposition intéressants.

Premier exemple. — La considération des trois complexes AP_A, BP_B, CP_C, où

$$\begin{array}{lll} P_A : x = 0, & P_B : y = 0, & P_C : z = 0; \\ A\ : 0, 0, 2, & B\ : 0, 0, -1, & C\ : 0, 0, 1, \end{array}$$

conduit à la surface

$$x = az - \frac{a}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$y = bz + \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$b^2 = 2a^2 + 1.$$

La sextique de Cayley se décompose en trois coniques dont les directions asymptotiques sont bien perpendiculaires aux plans cycliques du cône directeur. Ces trois coniques sont :

1° $\quad x = 0, \quad y^2 + 3z^2 = 3;$

2° $\quad y = 0, \quad 2x^2 + 3\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4};$

3° $\quad z = \frac{1}{2}, \quad 8x^2 - 4y^2 + 9 = 0.$

Cette surface possède une courbe nodale formée des trois coniques :

1° $x = 0, \qquad y^2 + 3z^2 = 6z;$

2° $y = 0, \qquad 2x^2 + 3z(z+1) = 0;$

3° $z = \frac{1}{2}, \qquad 8x^2 - 4y^2 + 9 = 0.$

Cette dernière est triple et coïncide avec une des coniques de Cayley.

Deuxième exemple. — Avec les trois complexes

$$\rho = X^2 + Y^2,$$
$$\rho' = 4X^2,$$
$$\rho'' = XZ.$$

La surface correspondante

$$x = az - \frac{b}{4a},$$
$$y = bz + \frac{b - 4a}{4b},$$
$$a^2 + b^2 + 1 + 4ab = 0.$$

La sextique se décompose en

$$z = 0, \qquad (x+1)y = 4,$$

et la biquadratique

$$y^2 + z^2 + x + 1 = 0,$$
$$x(x+1) = y(y-4),$$

qui est unicursale. On trouve une hyperbole nodale qui a pour équations

$$z = 0, \qquad 4xy = x + 1.$$

Les trois espèces de droites de Cayley.

Je me contenterai d'énoncer les résultats suivants, faciles à vérifier. Une surface réglée peut posséder une droite de Cayley; dans ce cas son cône directeur est du deuxième degré et la droite est perpendiculaire à l'un des plans cycliques de ce cône. Ces droites Δ sont de trois espèces :

Première espèce. — Si A décrit Δ, P_A roule sur une surface de troisième classe, parabolique.

Deuxième espèce. — P_A enveloppe un cylindre parabolique.

Troisième espèce. — P_A reste parallèle à lui-même.

Comme exercice, j'indiquerai le suivant : Démontrer que les surfaces qui possèdent deux droites de Cayley de troisième espèce sont du quatrième degré avec cône directeur du deuxième et que la courbe nodale est une cubique gauche que les génératrices coupent deux fois.

Détermination des courbes gauches qui possèdent une infinité de podaires planes.

J'envisage maintenant les surfaces développables. Chaque point de Cayley donne une podaire plane de l'arête de rebroussement de la surface. Pour avoir une infinité de points de Cayley il faut envisager deux complexes MP_M et $M' P_{M'}$, où $P_M P_{M'}$ soient parallèles. On a le théorème suivant :

Théorème. — *Si une surface possède deux points* *de Cayley* M′, M *dont les plans* $P_{M'}$, P_M *soient parallèles, alors :*

1° *Le cône est du deuxième degré;*

2° *Tous les points de la droite* MM′ *sont des points de Cayley, les plans correspondants sont parallèles entre eux et correspondent homographiquement aux points.*

Il n'y a qu'un point double à distance finie, c'est-à-dire un seul point F se trouve dans le plan P_F correspondant : je l'appellerai POINT SPÉCIAL DE CAYLEY;

3° *Les plans cycliques du cône sont : l'un, parallèle à* P_F; *l'autre, perpendiculaire à la droite de Cayley.*

En effet, soient

$$\begin{aligned} &M : \alpha\beta\gamma, && P_M : Ax + By + Cz + D = 0, \\ &M' : \alpha'\beta'\gamma', && P_{M'} : Ax + By + Cz + D' = 0 : \end{aligned}$$

les deux complexes s'écrivent :

$$\begin{aligned} &A\rho + B\rho' + C\rho'' + D(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ &\quad + (AX + BY + CZ)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = 0, \\ &A\rho + B\rho' + C\rho'' + D'(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ &\quad + (AX + BY + CZ)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit le complexe

$$N : \frac{\alpha + \lambda\alpha'}{1 + \lambda}, \quad \frac{\beta + \lambda\beta'}{1 + \lambda}, \quad \frac{\gamma + \lambda\gamma'}{1 + \lambda},$$

$$P_N : Ax + By + Cz + \frac{D + \lambda D'}{1 + \lambda} = 0,$$

. . . .

Les droites communes à tous ces complexes forment donc une congruence dont la surface focale se décompose en une conique à l'∞ et une surface que je vais chercher.

Théorème. — *Toutes les droites de la congruence* $MP_M MP_{M'}$, *où* P_M, $P_{M'}$ *sont parallèles, sont tangentes à un cône du deuxième degré ayant pour sommet le point* spécial F *de* MM'; *ses focales sont perpendiculaires aux plans cycliques du cône directeur, il est bitangent à ce cône le long des génératrices principales.*

Soit

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q$$

la droite qui décrit la congruence.

Je suppose que a, b soient les deux variables, p et q étant des fonctions de a et b. Je vais déterminer la fonction λ de façon que le plan

$$az + p - x + \lambda(bz + q - y) = 0$$

soit focal, c'est-à-dire ait son point caractéristique sur la droite. Ce point caractéristique est défini par

$$az + p - x + \lambda(bz + q - y) = 0,$$
$$z + \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial \lambda}{\partial a}(bz + q - y) + \lambda \frac{\partial q}{\partial a} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial \lambda}{\partial b}(bz + q - y) + \lambda\left(z + \frac{\partial q}{\partial b}\right) = 0.$$

J'écris qu'il est sur la droite

$$z + \frac{\partial p}{\partial a} + \lambda \frac{\partial q}{\partial a} = 0,$$

$$\lambda z + \frac{\partial p}{\partial b} + \lambda \frac{\partial q}{\partial a} = 0.$$

J'élimine z et j'ai

$$\lambda^2 \frac{\partial q}{\partial a} + \lambda\left(\frac{\partial p}{\partial a} - \frac{\partial q}{\partial b}\right) - \frac{\partial p}{\partial b} = 0,$$

qui donne pour λ deux valeurs $\lambda_1 \lambda_2$; le point focal est alors donné par

$$z = -\frac{\partial p}{\partial a} - \lambda \frac{\partial q}{\partial a},$$
$$x = az + p,$$
$$y = bz + q.$$

J'applique cette méthode à la congruence considérée. Soit Δ la droite de Cayley, que je suppose dans le plan zOx, l'origine des coordonnées étant le point spécial de Cayley, et $P_0 \equiv xOy$. Soient (α, O, γ) un deuxième point de Cayley et $z = h$ le point correspondant.

Si l'on pose

$$\frac{\alpha}{h} = m, \qquad \frac{\gamma}{h} = n + 1,$$

la congruence s'écrit

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} ap + bq &= 0, \\ a^2 + b^2 &= ma + n. \end{aligned} \right.$$

La deuxième équation montre que a, b ne sont pas indépendants, elle donne la conique à l'∞. Je prends alors pour variables a et q; b ne dépend pas de q. Le point focal est donné par

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & az + p - x + \lambda(bz + q - y) = 0, \\ & z + \frac{\partial p}{\partial a} + \lambda z \frac{\partial q}{\partial a} = 0, \\ & \frac{\partial p}{\partial q} + \lambda = 0. \end{aligned} \right.$$

La dernière donne

$$\lambda = -\frac{\partial p}{\partial q} = +\frac{b}{a}$$

ou

$$\lambda = -\frac{p}{q}.$$

Elle exprime que le plan (2) passe par l'origine. Dès lors, la surface focale est l'enveloppe du plan

$$qx - py = z(aq - bp),$$

mais p, q sont proportionnels à $-b + a$. Le plan s'écrit

$$ax + by = z(a^2 + b^2),$$

ou

$$(3) \qquad ax + by - z(ma + n) = 0.$$

Ainsi la surface focale (deuxième nappe) est l'enveloppe du plan (3).

Soit

$$ux + vy + wz = 0$$

ce plan. On trouve

$$n(u^2 + v^2) - w(mu + w) = 0,$$

qui permet d'étudier le cône. Ce dernier a, du reste, pour équation

$$(m^2 + 4n)y^2 + 4n(x^2 - nz^2 - mxz) = 0.$$

Surfaces développables.

On écrit $\frac{dp}{da} = \frac{dq}{db}$, d'où facilement

$$m\frac{dq}{q} = \frac{(m - 2a)(ma + 2n)}{2a^3(-a^2 + ma + n)} da;$$

le problème est ramené aux quadratures.

Deuxième méthode. — On peut traiter la question par une méthode rentrant tout à fait dans le programme des classes de Spéciales.

Nous savons que les droites considérées, c'est-à-dire les tangentes à l'une des courbes cherchées, doivent être parallèles aux génératrices d'un cône de deuxième degré. Soit

$$(1) \qquad z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

ce cône. Le cône réciproque

$$(2) \qquad z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (a^2 - b^2 = c^2)$$

sera le cône des normales aux plans osculateurs ou cône des binormales.

Si donc $F(t)$ désigne une fonction arbitraire, l'équation du plan osculateur peut s'écrire

$$(a\cos t)x + (b\sin t)y + z - F(t) = 0;$$

d'où les équations de la courbe sous forme paramétrique :

$$x = \frac{-F'\sin t - F''\cos t}{a},$$

$$y = \frac{+F'\cos t - F''\sin t}{b},$$

$$z = F + F''.$$

En écrivant que les pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes sont dans le plan $z = mx$, on trouve pour déterminer la fonction F

$$L\frac{C}{F} = \int \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t - mab^2\cos t}{\sin t[c^2\cos t + ma(1+b^2)]}dt,$$

où C est une constante arbitraire. L'une des valeurs de F est

$$F = (1-\cos t)^{\frac{c^2 - ma}{2c^2}}(1+\cos t)^{\frac{c^2+ma}{2c^2}};$$

m est d'ailleurs déterminé en fonction de abc :

$$m = \frac{c}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Si l'on pose $K = \dfrac{\alpha}{c\sqrt{1+b^2}}$ les courbes cherchées ont pour équations paramétriques

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{k[(k+1)t^2+(1-k)]}{2at^{k+1}},\\ y &= \frac{1-k^2}{bt^k},\\ z &= \frac{k[(k+1)t^2+(k-1)]}{2t^{k+1}}. \end{aligned}\right.$$

Il faut adjoindre à ces courbes leurs homothétiques par rapport à l'origine. Elles sont algébriques si k est entier ou fractionnaire. On peut se donner arbitrairement b et k par exemple. Il est facile de vérifier sur les formules (A) que chaque courbe est tracée sur un cône du deuxième degré ayant pour sommet l'origine et lié, comme il a été dit plus haut, au cône directeur.

En effet, on tire de (A) :

$$ax + z = \frac{k(k+1)}{t^{k-1}},$$

$$ax - z = \frac{k(1-k)}{t^{k+1}};$$

d'où

$$a^2x^2 - z^2 = \frac{b^2k^2}{1-k^2}\,y^2;$$

c'est l'équation du cône cherché.

On peut généraliser ceci et démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *On considère une courbe gauche telle que la podaire d'un point* O *soit plane et que son plan* P_0 *passe par* O. *Soit* C_1 *le cône formé par les parallèles aux tangentes menées par* O, *et soit* C_2 *le cône de sommet* O *sur lequel est la courbe. Ces cônes* C_1, C_2 *sont tels que tout plan parallèle* *à P_0 les coupe suivant deux courbes γ_1, γ_2, telles que γ_1 soit la podaire de γ_2 par rapport au pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan de la section.*

La droite

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

doit avoir une enveloppe et en outre

$$ap + bq = 0.$$

Donc

$$p = \lambda b, \qquad q = -\lambda a;$$

les équations de la droite deviennent

$$x = az + \lambda b,$$
$$y = bz - \lambda a.$$

Je suppose que dans ces formules x, y, z désignent les coordonnées du point de contact de la droite avec son enveloppe. Alors

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1};$$

d'où

$$z\,da + \lambda\,db + b\,d\lambda = 0,$$
$$z\,db - \lambda\,da - a\,d\lambda = 0.$$

Prenons a comme variable. Se donner $b = F(a)$, c'est se donner le cône C_1 ; soit $b' = \frac{db}{da}$:

$$(1) \qquad \lambda = e^{-\int \frac{1+b'^2}{a+bb'}da};$$

λ une fois connu, x, y, z sont donnés par les formules

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{2ab + (b^2 - a^2)b'}{a + bb'},$$
$$\frac{y}{\lambda} = \frac{(b^2 - a^2) - 2abb'}{a + bb'},$$
$$\frac{z}{\lambda} = \frac{b - ab'}{a - bb'}.$$

En formant l'équation du cône C_2, λ disparaît.

Cherchons la section de ce cône par le plan $z = 1$.

Cette section sera définie par

$$(\gamma_2) \quad \begin{cases} x = \dfrac{2ab + (b^2 - a^2)b'}{b - ab'}, \\[2ex] y = \dfrac{(b^2 - a^2) - 2abb'}{b - ab'}; \end{cases}$$

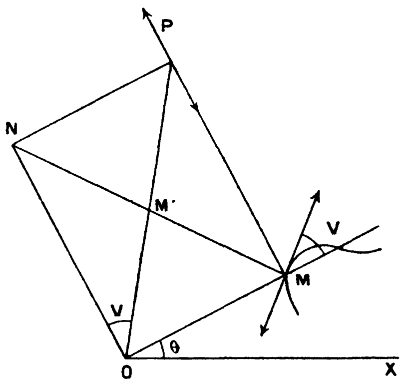
C'est la courbe γ_2 du plan $z = 1$. Posons

$$a = r\cos\theta,$$
$$b = r\sin\theta,$$

r θ étant les coordonnées polaires de la courbe γ_1,

$$\frac{db}{da} = b' = \operatorname{tang}\alpha.$$

Fig. 2.



Soit V l'angle de la tangente à γ_1 avec le rayon vecteur

$$\alpha = \theta + V;$$

les formules (γ_2) peuvent s'écrire

$$(\gamma'_2) \quad \begin{cases} x = \dfrac{r}{\sin V}\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2} - V\right), \\[2ex] y = \dfrac{r}{\sin V}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2} - V\right). \end{cases}$$

Soient M le point r, θ; N le point $\frac{r \cos V}{\sin V}$, $\theta + \frac{\pi}{2}$.

Je forme le rectangle MONP; P décrit la courbe γ_2; M' décrit le lieu du centre d'un cercle passant par O et tangent à γ_1. Si P décrit γ_2, le cercle de diamètre OP enveloppe γ_1; donc γ_1 est la podaire de γ_2.

Cas particulier des courbes (A) *qui ont une droite de Cayley.* — γ_1 doit être un cercle et γ_2 une conique de foyer O; on voit facilement que γ_1 est le cercle principal de la conique γ_2.

Détermination de toutes les courbes qui possèdent un point spécial de Cayley.

Les formules trouvées plus haut résolvent la question, mais la quantité λ est donnée par une quadrature. On peut trouver des formules n'en contenant aucune. Nous trouverons un exemple intéressant d'équations aux dérivées partielles signalées par M. de Tannenberg et qui admettent un groupe continu de transformations. Je prendrai les équations de la ligne droite sous la forme

$$x = az + f, \qquad y = bz + g,$$

et je garderai les lettres p, q pour désigner $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$. Il s'agit donc de trouver les courbes dont les tangentes appartiennent au complexe

$$af + bg = 0.$$

Les courbes cherchées seront les courbes intégrales d'une équation aux dérivées partielles, facile à former et qu'on peut écrire sous la forme

$$\text{(B)} \qquad (px + qy - 2z)^2 = (x^2 + y^2)(p^2 + q^2).$$

On aperçoit de suite la solution

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2},$$

où k est une constante arbitraire; la transformation de Legendre ne change pas l'équation. Je vais faire voir qu'une transformation ponctuelle change l'équation (B) en l'équation

$$\text{(C)} \qquad 1 + p^2 + q^2 = 0.$$

Au lieu de considérer ces équations en p, q, il est plus commode de considérer les équations associées. Par exemple, l'équation associée de (B) sera

$$\text{(B')} \qquad z(dx^2 + dy^2) = dz(x\,dx + y\,dy).$$

A tout point (x, y, z) de l'espace, elle fait correspondre une direction (dx, dy, dz) partant de ce point et située sur le cône du complexe. Or, il est facile de transformer (B') pour obtenir la forme

$$\text{(C')} \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

associée de (C). En effet (B') peut s'écrire

$$dx^2 + dy^2 = du(x\,dx + y\,dy) \qquad (z = e^u).$$

Je pose

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta,$$

l'équation devient

$$d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2 = \rho\,du\,d\rho,$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \rho\frac{d\theta^2}{d\rho} = du \qquad (\rho = e^v),$$

$$dv + \frac{d\theta^2}{dv} = du,$$

$$d\theta^2 = dv(du - dv);$$

d'où facilement la forme indiquée. On trouve ainsi la transformation pontuelle

$$x' = \text{arc tang}\,\frac{y}{x},$$

$$y' = \mathrm{L}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z}},$$

$$z' = i\,\mathrm{L}\sqrt{z},$$

qui fait correspondre les courbes cherchées et les minima, ou

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0$$

et

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx^2 + dy^2}{x\,dx + y\,dy}.$$

Or, une intégrale *complète* de $1 + p^2 + q^2 = 0$ se compose de tous les plans tangents au cercle imaginaire de l'∞ :

$$ax' + i\sqrt{1+a^2}\,y' - z' + b = 0,$$

a, b étant deux constantes arbitraires ; elle devient par la transformation

$$\frac{a}{i}\,\text{arc tang}\,\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{1+a^2}}{2}\,\mathrm{L}\left(\frac{x^2+y^2}{z}\right) - \mathrm{L}\sqrt{z} + b = 0;$$

d'où facilement

$$z = k e^{2h\,\text{arc tang}\,\frac{y}{x}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1-h^2}.$$

On a là une intégrale complète de l'équation (B).

Pour $h = 0$ on a

$$z = k\sqrt{x^2+y^2}:$$

h et k sont les deux constantes arbitraires.

Pour avoir les courbes intégrales, il faut lier h et k par une relation arbitraire et chercher l'enveloppe des surfaces précédentes.

En coordonnées cylindropolaires, cette surface peut s'écrire

$$z = ke^{2h\varphi}\rho^{1-h^2}.$$

C'est une surface spirale. Les courbes cherchées sont donc l'enveloppe d'une surface spirale

$$z = F(h)e^{2h\varphi}\rho^{1-h^2},$$

quand h varie. F est une fonction abitraire.

Toutes ces courbes admettent un groupe continu de transformations à 10 paramètres. En particulier, le groupe homographique

$$\begin{aligned} x' &= l(hx - ky), \\ y' &= l(kx + hy), \\ z' &= l(h^2 + k^2)z, \end{aligned}$$

échange les unes dans les autres les droites du complexe

$$af + bg = 0.$$

Note sur les surfaces réglées réciproques et sur la détermination de toutes les surfaces réglées qui admettent une ligne de striction donnée.

Nous allons retrouver la propriété des surfaces réglées réciproques en traitant le problème suivant : *Une courbe étant donnée, trouver toutes les surfaces réglées qui l'admettent comme ligne de striction.*

Considérons le trièdre de Frenet de cette courbe. Soient O un point quelconque de cette courbe, Ox la tangente, Oy la normale principale, Oz la binormale, S l'arc de la courbe. Les projections de la vitesse d'un point sur les axes mobiles Ox, Oy, Oz sont, en remarquant que $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $q = 0$:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} + \xi - ry = x' + \xi - ry, \\ V_y &= y' + rx - pz, \\ V_z &= z' + py. \end{aligned}$$

Soit $x = ay$, $y = bz$ la droite qui décrira la surface réglée où a, b varient avec t. Les formules précédentes permettent d'obtenir l'équation du plan tangent. En écrivant que l'origine est le point central, on trouve l'équation

$$\text{(I)} \qquad a'(1 + b^2) - abb' = br(1 + b^2 + a^2).$$

On peut supposer $t = s$, alors $r = \frac{1}{R}$, R étant le rayon de courbure en O. On a d'abord la solution $b = 0$ avec $a =$ const. Si dans (I) on traite b comme une fonction connue de s qu'on se donne, alors a est l'inconnue du problème, et l'on a à résoudre l'équation différentielle (I), qui est *une équation de Riccati*. On voit de suite que cette équation est vérifiée si

$$a^2 + b^2 + 1 = 0,$$

ce qui donne deux solutions en a. On intègre facilement en posant

$$a = u\sqrt{b^2 + 1}.$$

Si l'on remplace dans (I), on trouve, pour déterminer u, l'équation

$$\text{(II)} \qquad \frac{u'}{1 + u^2} = \frac{br}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

La solution complète du problème est donnée par les formules

$$a = \frac{r \operatorname{tang} \alpha}{\sqrt{r^2 - \alpha'^2}},$$

$$b = \frac{\alpha'}{\sqrt{r^2 - \alpha'^2}},$$

où α est une fonction arbitraire de l'arc s et α' sa dérivée; r est la courbure de la courbe donnée.

Interprétation géométrique. — Nous avons pris

$$x = az, \qquad y = bz$$

comme équations de la génératrice par rapport aux axes mobiles. Appelons α l'angle de cette droite avec yOz et β l'angle que forme sa projection sur yOz avec Oz; alors

$$a = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos \beta}, \qquad b = \operatorname{tang} \beta;$$

on a bien

$$u = \operatorname{tang} \alpha.$$

La formule (II) devient

(III) $$\alpha' = r \sin \beta.$$

Le plan tangent en O, c'est-à-dire le *plan central*, passe par Ox et fait l'angle β avec zOx. Si deux surfaces réglées ont le même plan central, c'est-à-dire si β est le même,

$$d\alpha = d\alpha_1,$$

$$\alpha - \alpha_1 = \text{const.},$$

et réciproquement.

Ainsi, quand on aura une surface répondant à la question, on en aura une autre en menant dans chaque plan central, par le point central, une droite Δ' faisant un angle constant avec la génératrice Δ de la première surface. Δ' décrira la deuxième. Ces deux surfaces auront même plan tangent tout le long de leur ligne de striction commune. Si Δ, Δ' sont rectangulaires, on a deux surfaces réglées réciproques. Naturellement, les cônes directeurs de ces surfaces sont réciproques (*voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. IV, Chap. XIV).

Note sur la congruence *hkl*.

Je me suis aperçu en terminant que c'était la congruence formée par les axes des complexes linéaires à trois termes :

$$\lambda A + \mu B + \nu C = o,$$

où λ, μ, ν sont trois paramètres variables, et $A = o$, $B = o$, $C = o$ les équations de trois complexes linéaires fixes (*voir*, par exemple, *Géométrie réglée* de Kœnigs, p. 50). On sait que ces ∞^2 complexes ont en commun les génératrices de l'un des systèmes d'un hyperboloïde H. Les axes coupent ces génératrices à angles droit, ce qui nous conduit à la troisième définition de la congruence. Mais on peut remplacer H par l'un quelconque des hyperboloïdes ayant les mêmes éléments de Cayley. On peut prendre un hyperboloïde dégénéré en faisceaux plans (KOENIGS, *Géométrie réglée*, p. 52), on retrouve alors la première définition. Avec ce nouveau point de vue, on retrouve bien facilement les cylindroïdes circonscrits à la surface focale et que j'ai considérés.