

E. KERAVAL

Surfaces partiellement cylindroïdes

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 49-83

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__49_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M²7b]

SURFACES PARTIELLEMENT CYLINDROÏDES;

PAR M. E. KERAVAL,

Professeur au lycée Hoche.

Définition. — Je dirai qu'un point A est un point de Cayley pour une surface réglée lorsque les pieds des perpendiculaires abaissées de A sur les génératrices forment une section plane de la surface; je désignerai par P_A le plan de cette section. Pour la surface appelée *cylindroïde de Cayley*, tout point A de l'espace est un point de Cayley.

MM. Appell et Bricard ont montré dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, années 1900-1901, que ce cylindroïde était la seule surface réglée réelle jouissant de la propriété en question pour tout point de l'espace. Pour les autres surfaces réglées, les points de Cayley A sont donc ou des points isolés ou bien formant des courbes ou des surfaces quand il en existe. Je laisse de côté des surfaces réglées qui possèdent zéro, un ou deux points de Cayley; j'appelle donc surfaces partiellement cylindroïdes celles qui possèdent au moins trois points de Cayley.

J'arrive alors à la classification suivante :

1^o Les surfaces à plan directeur qui possèdent deux points de Cayley en possèdent une infinité situés sur un cylindre de révolution ou dans un plan. L'équation de ces surfaces résulte de l'élimination de t entre

$$\left\{ \begin{array}{l} y = tx - kt^2, \\ z = \frac{at^3 + bt^2 + c}{1 + t^2}. \end{array} \right.$$

L'ensemble des termes du plus haut degré est

$$z(x^2 + y^2)(kz + ax).$$

Ces surfaces sont donc du quatrième degré. Si $a = 0$, $k = 0$, on a le cylindroïde de Cayley.

Tout ceci est extrêmement facile, je le laisse de côté.

2° Les surfaces à cône directeur. Je trouve :

1° Des surfaces S_9 du neuvième degré à cône directeur du troisième degré avec dix points de Cayley ;

2° Des surfaces du huitième degré S_8 à cône directeur du deuxième degré avec quatre points de Cayley ; on a alors une infinité formant une conique ;

3° Des surfaces du sixième degré S_6 avec cône directeur du deuxième degré. Ici les points de Cayley forment une *sextique* qui dans le cas général est indécomposable et qui a pour ses six directions asymptotiques les perpendiculaires aux six plans cycliques du cône directeur.

Dans les cas particuliers, la sextique peut se décomposer en une conique et une quartique ou en trois coniques.

Le degré 6 peut s'abaisser ; c'est ainsi qu'on trouve des surfaces du quatrième degré avec deux droites de Cayley. Ces droites sont toujours perpendiculaires aux plans cycliques du cône directeur.

4° Enfin la surface peut s'abaisser au second degré ; la sextique est alors réduite à six droites (pour l'un des systèmes de génératrices).

Ce sont les perpendiculaires communes aux génératrices isotropes de la surface, ou encore les perpendiculaires aux plans cycliques menées par les foyers du contour apparent de la surface sur les plans cycliques

centraux. Si d'un point d'une de ces droites on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices du système considéré, les pieds sont sur un cercle de la quadrique.

DÉFINITION DU COMPLEXE AP_A .

Étant donné un point A et un plan P_A , j'appelle *complexe* AP_A l'ensemble des droites Δ telles que le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ soit dans P_A . Ce complexe est du deuxième degré. Son cône de sommet S a pour sections circulaires :

- 1° Les plans parallèles à P_A ;
- 2° Les plans perpendiculaires sur S_A .

La courbe du complexe située dans un plan Q est une parabole ayant pour foyer le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Q et pour tangente au sommet l'intersection de Q et de P_A .

Notations. — J'ai dû me servir quelquefois d'axes obliques.

$$\widehat{yOz} = \varphi, \quad \widehat{zOx} = \varphi', \quad \widehat{xOy} = \varphi''.$$

Pour définir une droite Δ , je me servirai souvent de la notation

$$\begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q, \end{aligned}$$

ou alors de deux points $x_0y_0z_0, x_1y_1z_1$. Je pose alors comme d'habitude

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 &= X, & y_1z_0 - y_0z_1 &= L, \\ y_0 - y_1 &= Y, & z_1x_0' - z_0x_1 &= M, \\ z_0 - z_1 &= Z, & x_1y_0 - x_0y_1 &= N. \end{aligned}$$

On peut prendre alors

$$X = a, \quad Y = b, \quad Z = 1, \quad L = q, \quad M = -p, \quad N = bp - aq.$$

Je pose

$$\begin{aligned}\rho &= NY - MZ = (b^2 + 1)p - abq, \\ \rho' &= LZ - NX = -abp + (a^2 + 1)q, \\ \rho'' &= MX - LY = -ap - bq.\end{aligned}$$

Je désignerai habituellement les coordonnées de A par $\alpha\beta\gamma$ et l'équation de P_A par

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

L'équation du complexe AP_A est alors, en posant pour abrégé

$$\begin{aligned}U &= X + Y \cos \varphi'' + Z \cos \varphi' \\ V &= X \cos \varphi'' + Y + Z \cos \varphi, \\ W &= X \cos \varphi' + Y \cos \varphi + Z,\end{aligned}$$

$$D(UX + VY + WZ) + (AX + BY + CZ)(\alpha U + \beta V + \gamma W) + A(NV - MW) + B(LW - NU) + C(MU - LV) = 0.$$

En axes rectangulaires :

$$D(X^2 + Y^2 + Z^2) + (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(AX + BY + CZ) + A\rho + B\rho' + C\rho'' = 0$$

ou

$$\varphi(XYZ) + A\rho + B\rho' + C\rho'' = 0.$$

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DES SURFACES S_9 .

Axes rectangulaires. — Les surfaces qui possèdent trois points de Cayley A, B, C ont pour génératrices les droites communes à trois complexes AP_A , BP_B , CP_C .

Je suppose ici que $P_A P_B P_C$ forme un véritable trièdre :

$$\begin{aligned} A : \alpha\beta\gamma, & \quad P_A : Ax + By + Cz + D = 0, \\ B : \alpha'\beta'\gamma', & \quad P_B : A'x + B'y + C'z + D' = 0, \\ C : \alpha''\beta''\gamma'', & \quad P_C : A''x + B''y + C''z + D'' = 0; \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 \\ A''_1 & B''_1 & C''_1 \end{vmatrix} \text{ adjoint de } \Delta.$$

Ma surface est définie par les trois complexes

$$\begin{cases} A\rho + B\rho' + C\rho'' + \varphi_1(XYZ) = 0, \\ A'\rho + B'\rho' + C'\rho'' + \varphi_2(XYZ) = 0, \\ A''\rho + B''\rho' + C''\rho'' + \varphi_3(XYZ) = 0; \end{cases}$$

d'où l'on peut tirer $\rho\rho'\rho''$, car $\Delta \neq 0$,

$$A\rho + A_1\varphi_1 + A'_1\varphi_2 + A''_1\varphi_3 = 0, \quad \dots,$$

ou, pour abrégé,

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta\rho + \Phi_1 = 0, & \Phi_1 = A_1\varphi_1 + A'_1\varphi_2 + A''_1\varphi_3, \\ \Delta\rho' + \Phi_2 = 0, & \Phi_2 = B_1\varphi_1 + B'_1\varphi_2 + B''_1\varphi_3, \\ \Delta\rho'' + \Phi_3 = 0, & \Phi_3 = C_1\varphi_1 + C'_1\varphi_2 + C''_1\varphi_3. \end{cases}$$

Je multiplie (1) par XYZ et j'ajoute; j'ai

$$(2) \quad X\Phi_1 + Y\Phi_2 + Z\Phi_3 = 0.$$

C'est le cône directeur; il est du troisième degré.

Je démontrerai que ce n'est jamais une identité et je chercherai dans quel cas il peut se décomposer. Les deux premières équations (1) me donnent ensuite ρ et ρ' , c'est-à-dire, avec la notation $abpq$,

$$\begin{cases} (b^2 + 1)p - abq = -\frac{\Phi_1}{\Delta}, \\ -abp + (a^2 + 1)q = -\frac{\Phi_2}{\Delta}, \end{cases}$$

d'où

$$(3) \quad \begin{cases} x - az = p = \frac{a\Phi_3 - \Phi_1}{\Delta(a^2 + b^2 + 1)}, \\ y - bz = q = \frac{b\Phi_3 - \Phi_2}{\Delta(a^2 + b^2 + 1)}, \\ bx - ay = \frac{a\Phi_2 - b\Phi_1}{\Delta(a^2 + b^2 + 1)}, \\ a\Phi_1 + b\Phi_2 + c\Phi_3 = 0. \end{cases}$$

Ce sont les équations de la surface; la dernière donne le cône directeur, c étant une variable d'homogénéité. En cherchant les points de rencontre avec une droite, on trouve que la surface S_3 est du neuvième degré, et d'ailleurs elle peut se décomposer en trois cylindroïdes. La section par le plan de l'infini se compose de la cubique du cône directeur, plus six génératrices isotropes qu'on obtient en résolvant

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 0, \\ a\Phi_1 + b\Phi_2 + c\Phi_3 = 0. \end{cases}$$

La cubique peut être quelconque, mais elle détermine les six génératrices isotropes. En outre, à chaque génératrice du cône directeur, correspond une génératrice et une seule de la surface, et réciproquement. Il reste à faire voir que la relation

$$a\Phi_1 + b\Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

n'est pas une identité.

THÉORÈME. — *Si $P_A P_B P_C$ forment un vrai trièdre et si A, B, C ne sont pas confondus au sommet du trièdre, la relation entre les paramètres directeurs de la droite n'est pas une identité. Cette fois je prends les axes obliques et*

$$P_A = yOz, \quad P_B = zOx, \quad P_C = xOy.$$

Les trois complexes s'écrivent

$$\begin{cases} NV - MW + x(\alpha U + \beta V + \gamma W) = 0, \\ LW - NU + y(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W) = 0, \\ MU - LV + z(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W) = 0, \end{cases}$$

d'où le cône

$$Ux(\alpha U + \beta V + \gamma W) + Vy(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W) \\ + Wz(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W) = 0.$$

Soient

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos \varphi'' & \cos \varphi' \\ \cos \varphi'' & 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi' & \cos \varphi & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad \text{son adjoint.}$$

Je change de variables et je prends UVW; l'équation devient

$$U(\alpha U + \beta V + \gamma W)(\alpha U + b V + d W) \\ + V(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W)(b U + c V + e W) \\ + W(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W)(d U + e V + f W) = 0.$$

En écrivant que c'est une identité, on trouve facilement que $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ sont nuls.

Je montrerai qu'en général le cône du troisième ne se décompose pas; j'ai donc bien, en général, une surface S_9 du neuvième degré sans décomposition, coupée par le plan de l'infini comme il a été indiqué.

RECHERCHE DE TOUS LES POINTS DE CAYLEY
DES SURFACES S_9 .

THÉORÈME PRÉLIMINAIRE. — *Si une surface S_9 , formée avec trois complexes AP_A , BP_B , CP_C , appartient à un quatrième complexe de même forme, ce dernier est certainement une combinaison linéaire à coefficients constants des trois premiers, c'est-*

à-dire est l'un des complexes à trois termes

$$\lambda F_1 + \mu F_2 + \nu F_3 = 0,$$

$F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ étant les équations des trois premiers complexes.

En effet, les trois complexes donnés peuvent être remplacés par

$$\rho + \Phi_1(a, b) = 0,$$

$$\rho' + \Phi_2(a, b) = 0,$$

$$\rho'' + \Phi_3(a, b) = 0,$$

qui en sont des combinaisons linéaires à coefficients constants (j'ai remplacé $\frac{\Phi}{\Delta}$ par Φ). Le quatrième complexe est de la forme

$$F_4 \equiv A^{\text{IV}} \rho + B^{\text{IV}} \rho' + C^{\text{IV}} \rho'' + \varphi_4(ab) = 0,$$

et par conséquent sur la surface S_9 on a

$$\varphi_4 \equiv A^{\text{IV}} \Phi_1 + B^{\text{IV}} \Phi_2 + C^{\text{IV}} \Phi_3,$$

qui est une identité, sans quoi le cône directeur serait du deuxième degré. Donc

$$F_4 \equiv A^{\text{IV}} (\rho + \Phi_1) + B^{\text{IV}} (\rho' + \Phi_2) + C^{\text{IV}} (\rho'' + \Phi_3),$$

ce qui démontre le théorème.

DÉTERMINATIONS DES DIX POINTS DE CAYLEY DES SURFACES S_9 .

Quand on cherche à déterminer les points de Cayley avec des axes rectangulaires quelconques, on trouve qu'ils sont à l'intersection de trois surfaces du troisième degré qui ont en commun une cubique gauche qui ne convient pas, ce qui *semble* donner dix points. En prenant des axes obliques on peut choisir, comme plus

haut, P_A, P_B, P_C pour les plans coordonnés : $P_A = yOz$,
 $P_B = zOx$, $P_C = xOy$. Les trois complexes sont

$$\begin{cases} NV - MW + X(\alpha U + \beta V + \gamma W) = 0, \\ LW - NU + Y(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W) = 0, \\ MU - LV + Z(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W) = 0. \end{cases}$$

On ajoute après avoir multiplié par $\lambda\mu\nu$ et l'on identifie avec

$$\begin{aligned} & \Lambda(NV - MW) + B(LW - NU) + C(MU - LV) \\ & + (AX + BY + CZ)(\alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 W) \\ & + D(UX + VY + WZ) = 0. \end{aligned}$$

On a de suite

$$\lambda = A, \quad \mu = B, \quad \nu = C.$$

Les termes en $X^2 Y^2 Z^2$ donnent ensuite

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha + \beta \cos \varphi'' + \gamma \cos \varphi') &= D + \lambda(\alpha_1 + \beta_1 \cos \varphi'' + \gamma_1 \cos \varphi'), \\ \mu(\alpha' \cos \varphi'' + \beta' + \gamma' \cos \varphi) &= D + \mu(\alpha_1 \cos \varphi'' + \beta_1 + \gamma_1 \cos \varphi), \\ \nu(\alpha'' \cos \varphi' + \beta'' \cos \varphi + \gamma'') &= D + \nu(\alpha_1 \cos \varphi' + \beta_1 \cos \varphi + \gamma_1), \end{aligned}$$

ou, avec une notation facile à comprendre,

$$\begin{cases} \lambda U_A = D + \lambda U, \\ \mu V_B = D + \mu V, \\ \nu W_C = D + \nu W. \end{cases}$$

Premier cas.

$$U \neq U_A, \quad V \neq V_B, \quad W \neq W_C.$$

Alors

$$\lambda = \frac{-D}{U - U_A}, \quad \mu = \frac{-D}{V - V_B}, \quad \nu = \frac{-D}{W - W_C}.$$

Enfin les termes rectangles me donnent trois équations. Par exemple le terme en YZ :

$$\begin{aligned} & \mu(\alpha' \cos \varphi' + \beta' \cos \varphi + \gamma') + \nu(\alpha'' \cos \varphi'' + \beta'' + \gamma'' \cos \varphi) \\ & = \mu(\alpha_1 \cos \varphi' + \beta_1 \cos \varphi + \gamma_1) \\ & + \nu(\alpha_1 \cos \varphi'' + \beta_1 + \gamma_1 \cos \varphi) + 2D \cos \varphi, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mu W_B + \nu V_C = \mu W + \nu V + 2D \cos \varphi$$

ou

$$\mu(W_B - W) + \nu(V_C - V) = 2D \cos \varphi.$$

En remplaçant λ, μ, ν par leurs valeurs, on voit que les points de Cayley sont les points communs aux trois quadriques

$$S. \quad 2 \cos \varphi = \frac{V - V_C}{W - W_C} + \frac{W - W_B}{V - V_B},$$

$$S'. \quad 2 \cos \varphi' = \frac{W - W_A}{U - U_A} + \frac{U - U_C}{W - W_C},$$

$$S''. \quad 2 \cos \varphi'' = \frac{U - U_B}{V - V_B} + \frac{V - V_A}{U - U_A}.$$

Ce sont trois cylindres de révolution bien faciles à définir géométriquement. S, par exemple, est un cylindre de révolution à génératrices perpendiculaires à $\gamma O z$, car $V = 0$, $W = 0$ sont deux plans perpendiculaires, l'un à $O\gamma$, l'autre à Oz . De plus, l'ensemble des termes du deuxième degré est

$$-\sin^2 \varphi (\gamma^2 + z^2 + 2\gamma z \cos \varphi).$$

S est vérifiée pour $V = V_B$, $W = W_B$, donc passe par B, de même par C. Enfin S passe par l'intersection des plans

$$W = W_C, \quad V = V_B.$$

Le cylindre de révolution S perpendiculaire à P_A passe par B et C, puis par l'intersection du plan mené par B perpendiculairement à l'intersection de P_A, P_C et du plan mené par C perpendiculairement à l'intersection de P_A, P_B . On définirait de même les deux autres. Ces trois cylindres ne peuvent pas avoir de courbe commune; ils se coupent en huit points, mais l'un d'eux ω doit être rejeté. Il est défini par

$$U = U_A, \quad V = V_B, \quad W = W_C.$$

Les sept autres conviennent; on a en plus ABC, en tout dix points.

Deuxième cas. — $U - U_A, V - V_B, W - W_C$ ne sont pas tous trois différents de zéro. On trouve alors que deux des coefficients $\lambda_{\mu\nu}$ doivent être nuls; on a alors les points A, B, C.

CONSTRUCTION DES DIX POINTS DE CAYLEY,
CONNAISSANT LES TROIS CYLINDRES S, S', S".

On se donne trois cylindres de révolution S, S', S" dont les axes ne soient pas parallèles à un même plan et qui aient un point commun réel ω . On met ce point à part; les sept autres points sont gardés comme points de Cayley. On forme un trièdre $Oxyz$ dont les faces soient perpendiculaires aux cylindres. Il reste à trouver trois points de Cayley, A, B, C. Le plan qui passe par ω et est perpendiculaire à Ox coupe S" suivant deux génératrices; l'une passe par ω , l'autre par A. De même le plan qui passe par ω et est perpendiculaire à Ox donnera une autre droite passant par A, d'où A. On a de même B et C.

Remarque. — Il résulte de là que, si les trois points A, B, C supposés liés subissent un mouvement de translation par rapport au trièdre $P_A P_B P_C$, ils entraînent avec eux sans déformation le système des dix points.

CONSTRUCTION DES DIX PLANS DE CAYLEY
QUI CORRESPONDENT AUX DIX POINTS.

Si je désigne par $ux + vy + wz + s = 0$ l'équation du plan de Cayley qui correspond au point $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ ou mieux xyz , les six équations qu'on a trouvé plus haut

s'écrivent

$$(4) \quad \begin{cases} u(U - U_A) = -s, \\ v(V - V_B) = -s, \\ w(W - W_C) = -s; \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} v(W - W_B) + w(V - V_C) + 2s \cos \varphi = 0, \\ w(U - U_C) + u(W - W_A) + 2s \cos \varphi' = 0, \\ u(V - V_A) + v(U - U_B) + 2s \cos \varphi'' = 0. \end{cases}$$

En éliminant $\frac{u}{s}$, $\frac{v}{s}$, $\frac{w}{s}$ on a les trois cylindres qui déterminent le point xyz de Cayley. Pour avoir les plans de Cayley, il faut faire le contraire : éliminer xyz , c'est-à-dire UVW . On trouve ainsi

$$(6) \quad \begin{cases} s(v^2 + w^2 - 2vw \cos \varphi) + vw[(W_B - W_C)v + (V_C - V_B)w] = 0, \\ s(w^2 + u^2 - 2wu \cos \varphi') + wu[(U_C - U_A)w + (W_A - W_C)u] = 0, \\ s(u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi'') - uv[(V_A - V_B)u + (U_B - U_A)v] = 0. \end{cases}$$

La troisième, par exemple, représente une hypocyclide à trois rebroussements, tangente à Ox , Oy . Il vaut mieux procéder autrement pour avoir les plans de Cayley. Soient D un quatrième point de Cayley; P_D le plan correspondant. Cherchons l'équation du plan P_D . On a

$$u = \frac{s}{U_A - U_D}, \quad \dots;$$

donc l'équation du plan P_D est

$$\frac{x}{U_A - U_D} + \frac{y}{V_B - V_D} + \frac{z}{W_C - W_D} + 1 = 0.$$

Il coupe les axes en trois points H , K , L tels que

$$\overline{OH} = U_D - U_A, \quad \overline{OK} = V_D - V_B, \quad \overline{OL} = W_D - W_C.$$

D'où la règle suivante :

Prendre sur Ox , Oy , Oz des vecteurs \overline{OH} , \overline{OK} , \overline{OL}

égaux aux projections orthogonales de AD, BD, CD sur Ox, Oy, Oz. Le plan HKL est le plan cherché P_D.

Il résulte de là que, si l'ensemble des dix points subit un mouvement de translation par rapport au trièdre P_AP_BP_C, les sept autres plans de Cayley restent immobiles.

EXEMPLE D'ABAISSEMENT DU NOMBRE DES POINTS
DE CAYLEY.

Ce nombre 10 peut s'abaisser. J'indiquerai un seul exemple. Supposons les axes rectangulaires et prenons A sur Ox, B sur Oy, C sur Oz :

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad & \text{OA} = \alpha, \quad \text{OB} = \beta, \quad \text{OC} = \gamma \\ & \text{P}_A \equiv \gamma \text{Oz}, \quad \text{P}_B \equiv \alpha \text{Ox}, \quad \text{P}_C \equiv x \text{Oy}. \end{aligned}$$

On trouve sept points de Cayley qui forment sept des sommets d'un parallélépipède rectangle. Le cône directeur de la surface est

$$\alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma z^3 = 0.$$

La surface s'obtient en éliminant α, β entre les équations

$$\begin{aligned} & \alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma = 0, \\ x - \alpha z &= \frac{\alpha(\gamma - \alpha a)}{a^2 + b^2 + 1}, \quad y - \beta z = \frac{\beta(\gamma - \beta b)}{a^2 + b^2 + 1}. \end{aligned}$$

Les quatre plans nouveaux de Cayley ont pour équations

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + 1 = 0,$$

qui correspond à l'origine

$$\alpha x - \beta y = 0, \quad \beta y - \gamma z = 0, \quad \gamma z - \alpha x = 0.$$

Les trois derniers passent par une même droite.

DOUBLE ET TRIPLE DÉCOMPOSITION DES SURFACES S_9 .

Pour établir qu'il y avait dix points de Cayley, j'ai supposé que la S_9 ne se décomposait pas. Je vais montrer qu'il peut arriver que la S_9 se décompose ou bien en une surface du sixième degré S_6 et un cylindroïde de Cayley, ou bien en trois cylindroïdes. Dans ce dernier cas, les dix points seraient les points de Cayley communs aux trois cylindroïdes, c'est-à-dire ayant le même plan de Cayley dans chacun d'eux.

Pour que S_9 se décompose, il faut et il suffit que son cône directeur se décompose, et alors on a une surface à plan directeur ayant trois plans de Cayley formant trièdre, ce qui n'arrive que dans le conoïde.

Je prends $P_A P_B P_C$ pour trièdre de référence. ABC ont pour coordonnées $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$. Le cône directeur a pour équation

$$0 = Ux(\alpha U + \beta V + \gamma W) \\ + Vy(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W) + Wz(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W).$$

Je change de variables et je désigne par

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad \text{l'adjoint de} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi'' & \cos\varphi' \\ \cos\varphi'' & 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi' & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix}.$$

Je sais que, si la S_9 se décompose et donne un cylindroïde de plan directeur Q, il en est encore ainsi

quand A, B ou C se déplace perpendiculairement à Q. C'est cette considération qui va me guider dans tout ce qui suit. Je prends U, V, W pour variables; le cône devient

$$\begin{aligned} & U(\alpha U + \beta V + \gamma W)(\alpha U + \beta V + dW) \\ & + V(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W)(\beta U + cV + eW) \\ & + W(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W)(dU + eV + fW) = 0. \end{aligned}$$

J'écris qu'il se décompose et contient le plan

$$U = pV + qW;$$

j'ai ainsi quatre équations :

$$(7) \quad (\beta' + \alpha' p)(c + bp)(\beta + \alpha p)(ap^2 + bp) = 0,$$

$$(8) \quad (\gamma'' + \alpha'' q)(f + dq)(\gamma + \alpha q)(aq^2 + dq) = 0,$$

$$(9) \quad (\beta' + \alpha' p)(e + bq) + (\gamma' + \alpha' q)(c + bp) \\ + (\beta'' + \alpha'' p)(e + dp) + (\beta + \alpha p)(2apq + dp + bq) \\ + (\gamma + \alpha q)(ap^2 + bp) = 0,$$

$$(10) \quad (\gamma' + \alpha' q)(e + bq) + (\beta'' + \alpha'' p)(f + dq) \\ + (\gamma'' + \alpha'' q)(e + dp) + (\beta + \alpha p)(aq^2 + dq) \\ + (\gamma + \alpha q)(2apq + dp + bq) = 0.$$

Je me donne le trièdre $P_A P_B P_C$ et le point $A(\alpha\beta\gamma)$; ces équations me montrent que $B(\alpha'\beta'\gamma')$ et $C(\alpha''\beta''\gamma'')$ sont l'un sur une droite Δ' , l'autre sur une droite Δ'' , ces deux droites dépendant de deux paramètres p, q . Donc Δ' et Δ'' engendrent deux congruences et se correspondent dans ces deux congruences suivant une certaine loi. Or, il arrive que chaque fois que deux droites Δ' se coupent, les droites Δ'' correspondantes se coupent également. Le calcul est trop long en axes obliques, mais je l'ai vérifié quand le trièdre $P_A P_B P_C$ est trirectangle. Du reste, ceci résultera de ce qui va suivre.

J'imagine que je me donne A et B; l'équation (7)

me donne trois valeurs pour p . Entre les équations (8), (9) et (10), j'élimine $\beta'' + \alpha'' p$ et $\gamma'' + \alpha'' q$; j'ai une équation du troisième degré en q .

Je tire

$$(11) \quad \begin{cases} \beta'' + \alpha'' p = f_1(q), \\ \gamma'' + \alpha'' q = \frac{f_3(q)}{f + dq}, \end{cases}$$

f_1, f_3 étant de degrés 1 et 3. Je porte dans (10).

J'ai ainsi, dans le cas le plus général, neuf systèmes de valeurs en p, q , et, à chaque système, les équations (11) font correspondre une droite sur laquelle se trouve C.

Ainsi, ayant choisi A et B pour que S_9 se décompose, il faut et il suffit que C se trouve en un point arbitrairement choisi sur neuf droites parfaitement déterminées. Or, je dis que ces neuf droites se coupent trois par trois en six points, c'est-à-dire forment comme les six côtés et les trois diagonales d'un hexagone gauche.

Il en résultera que, A et B une fois choisis, il existe neuf droites sur lesquelles il faut prendre C pour avoir une double décomposition et six points C_1, C_2, \dots, C_6 pour lesquels on a la triple décomposition, c'est-à-dire que, si C est pris en l'un de ces six points, S_9 se décompose en trois surfaces du troisième degré qui sont des cylindroïdes.

Je vais d'abord montrer que sur chacune des neuf droites il y a deux points C pour lesquels se produit la triple décomposition. Je remarque immédiatement que, si en un point passent deux droites Δ'' , il en passe nécessairement trois : ce sont les perpendiculaires aux plans de décomposition du cône. Le cône exprimé en UVW s'écrit

$$U(\alpha U + \beta V + \gamma W)(aU + bV + dW + \dots = 0.$$

J'ordonne en U et je divise par $U - (pV + qW)$; la division est exacte, puisque C est sur l'une des neuf droites et le quotient est de la forme

$$AU^2 + A'V^2 + A''W^2 + 2BVW + 2B'WU + 2B''UV = 0.$$

Les six coefficients sont

$$\left\{ \begin{array}{l} A = a\alpha, \\ A' = c\alpha' + (b + ap)(\beta + \alpha p) + b(\beta' + \alpha'p), \\ A'' = f\alpha'' + (d + aq)(\gamma + \alpha q) + d(\gamma'' + \alpha''q), \\ 2B = (d + aq)(\beta + \alpha p) + (b + ap)(\gamma + \alpha q) + b(\gamma' + \alpha'q) \\ \quad + e\alpha' + e\alpha'' + d(\beta'' + \alpha''p), \\ 2B' = d\alpha + d\alpha'' + a(\gamma + \alpha q), \\ 2B'' = a(\beta + \alpha p) + b\alpha + b\alpha'. \end{array} \right.$$

Sur la droite que l'on considère, α'' , β'' , γ'' varient, mais $\beta'' + \alpha''p$ et $\gamma'' + \alpha''q$ sont constants.

Si je remplace α'' par x , les six coefficients sont de la forme

$$\begin{array}{lll} A, & A', & A'' = A''_1 + fx, \\ 2B = 2B_1 + ex, & 2B' = 2B'_1 + dx, & 2B''; \end{array}$$

x est la seule variable. En égalant à zéro le discriminant, j'ai une équation du deuxième degré en x . En général, le coefficient de x^2 n'est pas nul; donc il y a deux points de triple décomposition sur chacune des neuf droites, donc il y a six points tels que par chacun d'eux, il passe trois des droites.

Cas du trièdre trirectangle. — Si P_A, P_B, P_C forment un trièdre trirectangle, les calculs sont beaucoup plus simples. On ne trouve plus que trois droites qui forment un trièdre. Alors deux des points A, B, C étant choisis, le troisième est parfaitement déterminé s'il y a triple décomposition. Si, par exemple, on prend

$$\alpha'' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = +1 \quad \text{pour C,}$$

les points A et B se correspondent par les formules suivantes qui déterminent une transformation birationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{9x_0y_0^2}{4z_0^3 + 27x_0^2}, \\ y_1 = \frac{y_0^3}{4z_0^3 + 27x_0^2}, \\ z_1 = \frac{-3y_0^2x_0}{4z_0^3 + 27x_0^2}; \\ x_0 = \frac{x_1^3}{4z_1^3 + 27y_1^2}, \\ y_0 = \frac{9x_1^2y_1}{4z_1^3 + 27y_1^2}, \\ z_0 = \frac{-3x_1^2z_1}{4z_1^3 + 27y_1^2}. \end{array} \right.$$

EXEMPLE DE DOUBLE DÉCOMPOSITION (AXES RECT.).

$$\begin{array}{ll} A : 1, 0, 1; & P_A : y - z = 0, \\ B : -1, 0, 1; & P_B : y + z = 0, \\ C : 0, 1, 0; & P_C : z - x = 0. \end{array}$$

La surface S_9 se décompose et donne :

1° Le conoïde

$$z(x^2 + y^2) = xy;$$

2° La surface S_0 définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1-b^2}{3b-1}, \\ x - az = p = \frac{(1-a)(ab+b-1)}{a^2+b^2+1}, \\ y - bz = q = \frac{a(1-b^2)+2b}{a^2+b^2+1}. \end{array} \right.$$

EXEMPLE DES NEUF DROITES.

Si l'on prend

$$\varphi = \varphi' = 90^\circ, \quad \varphi'' = 60^\circ$$

avec

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 3, \quad \alpha'' = 0, \quad \beta'' = -8, \quad \gamma'' = -4,$$

on a d'abord, pour q , trois valeurs

$$q = +1, \quad q = -1, \quad q = \infty.$$

On a d'abord les six droites Δ' suivantes qui correspondent à

$$q = +1 \quad \text{avec} \quad p = 2, \quad 1, \quad 5;$$

$$q = -1 \quad \text{avec} \quad p = 2, \quad -1, \quad 3.$$

$$\Delta'_1 : y + 2x = 18, \quad z + x = 9,$$

$$\Delta'_2 : y + x = 0, \quad z + x = -3,$$

$$\Delta'_3 : y + 5x = 0, \quad z + x = 45,$$

$$\Delta'_4 : y + 2x = -18, \quad z - x = 33,$$

$$\Delta'_5 : y - x = 0, \quad z - x = -3,$$

$$\Delta'_6 : y + 3x = 0. \quad z - x = 45.$$

Ces droites se coupent deux à deux en six points :

$$B_1 : 6, \quad 6, \quad 3,$$

$$B_2 : -18, \quad 54, \quad 27,$$

$$B_3 : 0, \quad 0, \quad 45,$$

$$B_4 : 6, \quad -30, \quad 39,$$

$$B_5 : -18, \quad 18, \quad 15,$$

$$B_6 : 0, \quad 0, \quad -3.$$

Il reste à trouver les trois autres droites qui correspondent à la racine infinie. On trouve les trois droites

$$B_3 B_6, \quad B_1 B_4, \quad B_2 B_5.$$

On a

$$3 \text{ droites parallèles à } z + x = \text{const.},$$

$$3 \quad \text{»} \quad z - x = \text{const.},$$

$$3 \quad \text{»} \quad z = \text{const.}$$

Il en est toujours ainsi, car on a, pour p , trois

valeurs p_1, p_2, p_3 ; les droites sont, trois par trois, parallèles aux plans

$$y + p_1x = 0, \quad y + p_2x = 0, \quad y + p_3x = 0.$$

SECONDE PARTIE.

ÉTUDE DES SURFACES S_8 .

Ces surfaces s'obtiennent en supposant que P_A, P_B, P_C sont parallèles à une même droite, deux d'entre eux n'étant pas parallèles.

PROBLÈME PRÉLIMINAIRE. — *Condition d'indépendance de trois complexes AP_A, BP_B, CP_C où P_A, P_B, P_C sont parallèles à une même droite, Oz par exemple.*

Je dis qu'ils sont indépendants s'ils déterminent une surface. Dans le cas contraire, les équations se réduisent à deux; on a une congruence.

$$\widehat{xOz} = 90^\circ, \quad \widehat{yOz} = 90^\circ, \quad \widehat{xOy} = \varphi$$

Première complexe,

$$A : \alpha\beta\gamma, \quad P_A : x = 0.$$

Deuxième complexe,

$$B : \alpha'\beta'\gamma', \quad P_B : y = 0.$$

Ces deux complexes ont pour équations

$$\begin{aligned} X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + NY - MZ + \cos\varphi[X(\alpha Y + \alpha Z) + NX] &= 0, \\ Y(\alpha'X + \beta'Y + \gamma'Z) + LZ - NX + \cos\varphi[Y(\alpha'Y + \beta'X) - NY] &= 0, \end{aligned}$$

(69)

Je multiplie par λ, μ , j'ajoute et j'identifie avec

$$\begin{aligned} D(X^2 + Y^2 + (\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z)(AX + BY) & \quad . \\ + A(NY - MZ) + B(LZ - NX) & \\ + \cos \varphi[(\alpha_1 Y + \beta_1 X)(AX + BY) + 2 DXY + ANX - BNY] = 0. & \end{aligned}$$

J'en tire

$$\lambda = A, \quad \mu = B, \quad D = 0.$$

Donc P_A, P_B, P_C doivent passer par une même droite qui est ici Oz si le troisième est une conséquence des deux autres.

Les autres conditions expriment que A, B, C sont dans un même plan perpendiculaire à Oz , soit xOy . En outre,

$$\begin{array}{l} BC \text{ perpendiculaire à } P_A, \\ CA \quad \quad \quad \text{»} \quad \quad \quad P_B, \\ AB \quad \quad \quad \text{»} \quad \quad \quad P_C. \end{array}$$

J'ai admis que si les trois complexes n'étaient pas indépendants, c'est-à-dire si l'un est la conséquence des deux autres, ils étaient liés par une relation homogène à coefficients constants.

Or, en axes rectangulaires, on peut les écrire

$$\begin{aligned} A\rho + B\rho' + \varphi_1(XYZ) &= 0, \\ A'\rho + B'\rho' + \varphi_2(XYZ) &= 0, \\ A''\rho + B''\rho'' + \varphi_3(XYZ) &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$AB' - BA' \neq 0.$$

Les deux premiers donnent ρ et ρ' ; en portant dans le troisième on a le cône directeur ou une identité. Si les trois complexes ne sont pas indépendants, on a une identité et alors on a bien une relation de la forme indiquée. De là le théorème :

THÉORÈME. — *Pour que le complexe CP_C soit une*

conséquence des deux complexes AP_A, BP_B , où P_A, P_B se coupent suivant une droite Δ et où P_C est parallèle à Δ , il faut que P_C passe par Δ et que

$$\begin{array}{lll} BC & \text{soit perpendiculaire à} & P_A, \\ CA & \text{»} & P_B, \\ AB & \text{»} & P_C. \end{array}$$

DEGRÉ DES SURFACES S_8 .

SECTION PAR LE PLAN DE L'INFINI.

Je me donne trois complexes indépendants AP_A, BP_B, CP_C , et je suppose P_A, P_B, P_C parallèles à Oy .

Les équations des trois complexes sont

$$A\rho + C\rho'' + (AX + CZ)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + D(X^2 + Y^2 - Z^2) = 0,$$

$$A'\rho + C'\rho'' + \dots = 0,$$

$$A''\rho + C''\rho'' + \dots = 0.$$

Je suppose $AC' - CA' \neq 0$; alors les deux premières donnent ρ et ρ'' . En portant dans la troisième, j'ai le cône. J'ai alors trois équations de la forme

$$\rho = \Phi_1(X, Y, Z) = \Phi(a, b, 1) = \Phi_1(a, b, c),$$

$$\rho' = \Phi_2,$$

$$\Phi_3 = 0,$$

Φ_1, Φ_2, Φ_3 homogènes et du deuxième degré en X, Y, Z ou a, b, c .

On en tire

$$\left\{ \begin{array}{l} x - az = p = \frac{\Phi_1 - a\Phi_2}{a^2 + b^2 + 1}, \\ y - bz = q = \frac{-a\Phi_1 - (b^2 + 1)\Phi_2}{a^2 + b^2 + 1}, \\ \Phi_3 = 0. \end{array} \right.$$

On a quatre génératrices isotropes dans le plan de

l'infini. La section par ce plan se compose d'abord de ces quatre droites, puis de la conique du cône directeur, enfin de deux génératrices orthogonales à l'intersection de P_A, P_B . Enfin la surface est unicursale et du huitième degré.

CONDITION D'ABAISSEMENT DU DEGRÉ DES SURFACES S_8, S_8 .

Ce degré s'abaisse si les numérateurs de p, q contiennent $a^2 + b^2 + 1$ en facteur, c'est-à-dire si les génératrices isotropes sont à distance finie. La considération du cône du complexe montre qu'il faut : ou que deux des plans P_A, P_B, P_C soient parallèles (on a alors une droite de Cayley), ou que A, B, C soient en ligne droite. Le degré s'abaisse alors de deux unités. Je reviendrai sur les droites de Cayley. On suppose que

$$a^2 + b^2 \neq \text{const.}$$

RECHERCHE DES POINTS DE CAYLEY DES SURFACES S_8 .

$$\begin{aligned} \widehat{xOy} &= \varphi, & \widehat{yOz} &= 90^\circ, & \widehat{zOx} &= 90^\circ; \\ A &: \alpha\beta\gamma, & P_A &: x = 0, \\ B &: \alpha'\beta'\gamma', & P_B &: y = 0, \\ C &: \alpha''\beta''\gamma'', & P_C &: y - mx + h = 0. \end{aligned}$$

Les trois complexes ont pour équations

$$\begin{aligned} X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + (NY - MZ) + \cos \varphi [X(\alpha Y + \beta X) + NX] &= 0, \\ Y(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) + (LZ - NX) + \cos \varphi [Y(\alpha' Y + \beta' X) - NY] &= 0, \\ h(X^2 + Y^2 + Z^2) + (\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z)(Y - mX) \\ - m(NY - MZ) + (LZ - NX) \\ + \cos \varphi [(\alpha'' Y + \beta'' X)(Y - mX) + 2hXY - mNX - NY] &= 0. \end{aligned}$$

J'appelle xyz le nouveau point de Cayley. Je mul-

multiplie les équations précédentes par $\lambda\mu\nu$, j'ajoute et j'identifie avec

$$\begin{aligned} & D(X^2 + Y^2 + Z^2) + (xX + yY + zZ)(AX + BY) \\ & + A(NY - MZ) + B(LZ - NX) \\ & + \cos\varphi[(xY + yX)(AX + BY) + 2DXY + ANX - BNY] = 0. \end{aligned}$$

On arrive facilement aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda U_A = m\nu U_C, \\ \beta V_B = -\nu V_C, \\ \lambda V_A + \mu U_B + \nu U_C = m\nu V_C, \\ \lambda(z - \gamma) = m\nu(z - \gamma'), \\ \mu(z - \gamma') = -\nu(z - \gamma''), \end{array} \right.$$

où $U_{A=0}$ représente le plan perpendiculaire à Ox et qui passe par A ,

Premier cas : $\gamma, \gamma', \gamma''$ inégaux. — On trouve alors un seul nouveau point de Cayley qui est à l'intersection de trois plans :

$$\begin{array}{llll} Q_A & \text{perpendiculaire à } P_A & \text{mené par } BC, \\ Q_B & \text{»} & P_B & \text{»} & CA, \\ Q_C & \text{»} & P_C & \text{»} & AB. \end{array}$$

Si A, B, C sont en ligne droite, il y a donc une droite de Cayley, sinon quatre points.

Deuxième cas : $\gamma' = \gamma$. — On peut supposer

$$\gamma' = \gamma = 0, \quad \gamma'' \neq 0.$$

On trouve également un seul nouveau point de Cayley ou alors une droite si AB est perpendiculaire à P_C .

Troisième cas : $\gamma = \gamma' = \gamma''$. — Alors A, B, C sont dans un plan perpendiculaire à la droite Δ à laquelle

P_A, P_B, P_C sont parallèles. Ce cas va nous conduire à la conique de Cayley.

SURFACES S_8 QUI POSSÈDENT UNE CONIQUE DE CAYLEY.

On peut supposer $\gamma = \gamma' = \gamma'' = 0$. Les équations trouvées plus haut entraînent alors $z = 0$, c'est-à-dire que les nouveaux points de Cayley sont dans le plan ABC. On trouve, en outre,

$$m(V_A U_C - U_A V_C) V_B = (U_B V_C - V_B U_C) U_A.$$

C'est l'équation d'une conique qui passe : 1° par ABC, 2° par A'B'C', savoir C' à l'intersection $U_A = 0$, $V_B = 0$, ... On retrouve ainsi le théorème de Pascal avec la droite de Pascal rejetée à l'infini. L'hexagone est AB'CA'BC'A avec

AB'	parallèle à	BA'	perpendiculaires à	P_C ,
B'C'	»	CB'	»	P_A ,
CA'	»	AC'	»	P_B .

La conique peut donc être absolument quelconque.

Le plan de Cayley qui correspond à un point xy de cette conique s'écrit

$$m V_B (U_C - U_A) x + U_A (V_B - V_C) y + h U_A V_B = 0.$$

Il enveloppe un cylindre de troisième classe dont les génératrices sont parallèles à Δ .

EXEMPLE NUMÉRIQUE AVEC CERCLE DE CAYLEY.

Je prends des axes rectangulaires, A sur Ox , B sur Oy , C à l'origine,

$$CA = CB = 2h,$$

$$P_A : yOz, \quad P_B : zOx, \quad P_C : x + y + h = 0.$$

Les équations de la surface sont

$$\begin{cases} x - az = p = -ah(a^3 + b^3 + a), \\ y - bz = q = -bh(a^3 + b^3 + b), \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases}$$

La surface est bien du huitième degré et ne se décompose pas.

L'équation du cercle de Cayley est

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 2h(x + y).$$

Les plans de Cayley sont parallèles à Oz et leurs traces sur xOy enveloppent une hypocycloïde à trois points de rebroussement. Ces traces sont les droites de Simpson du triangle CEF :

$$\begin{aligned} \overline{CE} &= -h && \text{sur } Cx, \\ \overline{CF} &= -h && \text{sur } Cy. \end{aligned}$$

DÉCOMPOSITION DES SURFACES S_8 EN DEUX SURFACES S_4
A PLAN DIRECTEUR. CONDITION DE RÉALITÉ DES SURFACES S_8 .

La question étant très facile, je me contenterai d'indiquer les résultats. Les surfaces S_8 peuvent être réelles ou imaginaires selon que le cône directeur du deuxième degré est lui-même réel ou imaginaire. Elles se décomposent en deux surfaces S_4 à plan directeur si le cône se décompose en deux plans. (A propos des S_4 , j'ai omis de dire qu'elles possèdent une cubique gauche nodale tracée sur le cylindre de révolution de Cayley.)

Ayant choisi P_A, P_B, P_C parallèles à une droite Δ , ainsi que les points A et B , la surface S_8 se décompose quand le point C est pris sur une quadrique qui peut être, suivant les cas, un parabolôïde elliptique ou hyperbo-

lique. Dans ce dernier cas seulement, les deux surfaces S_4 sont réelles et leurs plans directeurs sont perpendiculaires aux génératrices du paraboloidé hyperbolique qui passent au point C considéré.

Quand le paraboloidé est hyperbolique, S_8 est toujours réelle; s'il est elliptique il partage l'espace en deux régions: il faut prendre C dans l'une d'elles pour que S_8 soit réelle.

COMPLÉMENT SUR LES DIX POINTS DES S_9 .

EXEMPLE NUMÉRIQUE DE M. DARBOUX.

Je reviens au cas des S_9 . Il y a en général dix points de Cayley auxquels correspondent dix plans.

On peut se demander si ces dix points et les plans correspondants jouent exactement le même rôle et si, par exemple, trois des plans forment toujours un trièdre. Or, on voit bien sur des exemples numériques qu'il n'en est pas toujours ainsi.

Si le fait se produit, c'est que les trois complexes correspondants ne sont pas indépendants, sans quoi le cône directeur serait du deuxième degré; or, on le suppose du troisième. Alors, d'après ce que nous avons vu, chaque complexe est une combinaison linéaire à coefficients constants des deux autres, les trois plans P_A, P_B, P_C passent par une droite Δ et l'on a

BC	perpendiculaire à	P_A ,
CA	»	P_B ,
AB	»	P_C .

Je dis que les sept points autres que A, B, C sont encore sur trois cylindres de révolution d'axes perpendiculaires à Δ .

Je me donne A, B, C, P_A, P_B, P_C , comme il est dit,

et je prends

$$\begin{aligned} A &: \alpha\beta O, & P_A &: x = 0, \\ B &: \alpha'\beta' O, & P_B &: y = 0, \end{aligned}$$

$$yOz = 90^\circ, \quad \widehat{zOx} = 90^\circ, \quad xOy = \varphi.$$

Pour déterminer la surface, il faut se donner un quatrième complexe

$$D : \alpha''\beta''\gamma'', \quad P_D : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Des calculs absolument analogues à d'autres faits plus haut me conduisent aux cinq équations

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda(U - U_A) + A(U - U_D) &= C(z - \gamma''), & \bullet \\ \mu(V - V_B) + B(V - V_D) &= C(z - \gamma''), \\ C(V - V_D) + B(z - \gamma'') + \mu z &= 0, \\ C(U - U_D) + A(z - \gamma'') + \lambda z &= 0, \\ A(V - V_D) + B(U - U_D) + \lambda(V - V_A) \\ &+ \mu(U - U_B) - 2C(z - \gamma'') \cos \varphi = 0. \end{aligned} \right.$$

Je tire $\lambda\mu$ des deux premiers; en portant dans les trois dernières, j'ai les équations des trois surfaces qui déterminent les sept points autres que A, B, D. L'équation quatrième me donne

$$\begin{aligned} (S) \quad C(V - V_D)(V - V_B) + B(V - V_B)(z - \gamma'') \\ - Cz(z - \gamma'') - Bz(V - V_D) = 0. \end{aligned}$$

C'est un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires à yOz ou P_A et qui est de révolution. Il passe par B, C, D. La cinquième équation donne un cylindre perpendiculaire à P_B . La sixième donnerait une surface du troisième degré, mais on peut la laisser de côté, car en introduisant le point C on aurait un troisième cylindre perpendiculaire à P_C . On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on considère l'ensemble des*

dix points de Cayley d'une surface S_9 , quand on met de côté trois de ces points, les sept autres sont sur trois cylindres de révolution dont les axes sont perpendiculaires aux plans de Cayley qui correspondent aux trois premiers points. Ces trois plans forment habituellement un trièdre, sinon ils passent par une même droite Δ : la propriété subsiste et les trois cylindres sont alors orthogonaux à Δ .

Dans l'exemple numérique de M. Darboux que je vais donner, ce fait se produit quatre fois sur les cent vingt combinaisons des plans pris trois à trois.

Exemple de M. Darboux : Axes rectangulaires.

— Je prends

$$\begin{array}{ll} A_1 : & 1 \quad 0 \quad 0 \quad P_1 : \quad y + z = 0, \\ A_2 : & 0 \quad 1 \quad 0 \quad P_2 : \quad z + x = 0, \\ A_3 : & 0 \quad 0 \quad 1 \quad P_3 : \quad x + y = 0. \end{array}$$

On trouve alors :

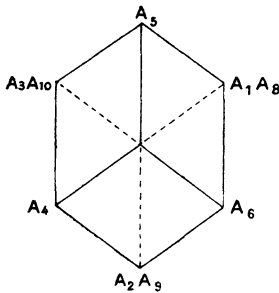
$$\begin{array}{ll} A_4 : & -1 \quad 0 \quad 0 \quad P_4 : \quad y - z = 0, \\ A_5 : & 0 \quad -1 \quad 0 \quad P_5 : \quad z - x = 0, \\ A_6 : & 0 \quad 0 \quad -1 \quad P_6 : \quad x - y = 0, \\ A_7 : & \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad P_7 : \quad x + y + z - \frac{1}{2} = 0, \\ A_8 : & \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad P_8 : \quad x - y - z - \frac{1}{2} = 0, \\ A_9 : & -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad P_9 : \quad -x + y - z - \frac{1}{2} = 0, \\ A_{10} : & -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad P_{10} : \quad -x - y + z - \frac{1}{2} = 0. \end{array}$$

Les plans sont identiques à ceux de M. Darboux ; les trois premiers points sont symétriques par rapport à l'origine. Si j'envisage les cent vingt combinaisons des

dix plans trois à trois, je trouve seulement quatre faux trièdres, c'est-à-dire quatre systèmes de trois plans passant par une droite Δ , savoir :

P_1	P_2	P_6	qui passent par	$x = y = -z,$
P_1	P_3	P_5	»	$z = x = -y,$
P_2	P_3	P_4	»	$y = z = -x,$
P_4	P_5	P_6	»	$x = y = z.$

On peut projeter les dix points suivant les sommets



et le centre d'un hexagone régulier, comme l'indique la figure.

A_7	a pour cote	$h,$
A_8 A_9 A_{10}	»	$\frac{h}{3},$
A_1 A_2 A_3	»	$\frac{5h}{6},$
A_4 A_5 A_6	»	$\frac{h}{6}.$

Mais ici la surface S_9 se décompose en trois cylindroïdes :

$$\begin{aligned} x(y^2 + z^2) + yz &= 0, \\ y(z^2 + x^2) + zx &= 0, \\ z(x^2 + y^2) + xy &= 0. \end{aligned}$$

Les dix points sont communs aux cylindroïdes symétriques des premiers par rapport à l'origine.

Après avoir établi tous ces résultats, j'ai eu l'occasion de lire un Mémoire de M. Darboux sur les mouvements algébriques qui se trouve à la fin de la *Cinématique* de M. Kœnigs. L'éminent géomètre, après avoir défini un certain mouvement d'un corps solide à deux paramètres, se propose de chercher s'il n'existe pas des points du corps qui décrivent des plans. Il démontre que, dans le cas le plus général, il doit en exister dix; c'est précisément le nombre que je trouve pour mes points de Cayley. J'ai cherché si les dix points de M. Darboux ne pouvaient pas être construits comme les miens, et je suis arrivé aux mêmes résultats. Le mouvement étudié par M. Darboux résulte du renversement d'un corps fixe autour d'une droite passant par l'origine, plus une translation. On peut remplacer ceci par un renversement autour d'une droite Δ parallèle à la première, plus une translation parallèle à Δ . Au lieu de laisser les deux paramètres indépendants, on peut les lier par une relation telle que la translation soit nulle. Alors Δ décrit une des surfaces S_9 que j'étudie.

Réciproquement, soient Σ le solide formé par l'ensemble des points de Cayley et Σ' le solide symétrique de Σ par rapport aux génératrices d'une S_9 ; il est clair qu'il y aura dix points de Σ' qui décriront des courbes planes : ce sont les points de M. Darboux. Ces points sont identiques aux miens; les plans sont placés de façon un peu différente, mais jouissent de propriétés analogues. Je vais me permettre de reprendre les calculs de M. Darboux d'une façon un peu différente, de manière à mettre en évidence la construction géométrique des points quand on connaît trois d'entre eux et les

plans correspondants, construction qui n'est pas indiquée dans le Mémoire que j'indique (*Cinématique* de Kœnigs, p. 363).

J'appelle encore φ , φ' , φ'' les angles des axes et je pose pour abrégé

$$\begin{cases} P = \lambda + \mu \cos \varphi'' + \nu \cos \varphi', \\ Q = \lambda \cos \varphi'' + \mu + \nu \cos \varphi, \\ R = \lambda \cos \varphi' + \mu \cos \varphi + \nu. \end{cases}$$

J'appelle xyz le point de la figure fixe, $x'y'z'$ le point correspondant de la figure mobile. Les formules que je vais écrire définissent une translation, plus un renversement :

$$(1) \begin{cases} x' = \frac{f_1(\lambda, \mu, \nu) + x(\lambda P - \mu Q - \nu R) + 2\lambda Qy + 2\lambda Rz}{\lambda P + \mu Q + \nu R}, \\ y' = \frac{f_2(\lambda, \mu, \nu) + \nu(\mu Q - \nu R - \lambda P) + 2\mu Rz + 2\mu Px}{\lambda P - \mu Q + \nu R}, \\ z' = \frac{f_3(\lambda, \mu, \nu) - z(\nu R - \lambda P - \mu Q) + 2\nu Px + 2\nu Qy}{\lambda P + \mu Q + \nu R}, \end{cases}$$

où

$$f_i = a_i \lambda^2 + a'_i \mu^2 + a''_i \nu^2 - 2b_i \mu \nu + 2b'_i \lambda \nu + 2b''_i \lambda \mu.$$

J'écris que

$$lx' + my' + nz' + p \equiv 0.$$

quels que soient λ , μ , ν . J'ai ainsi six équations; j'en écrirai deux, les autres s'en déduisent par permutations sur xyz , $\varphi\varphi'\varphi''$ et les accents pour les lettres a , b , ainsi que les indices :

$$\begin{aligned} & l(a_1 + x + 2y \cos \varphi'' + 2z \cos \varphi') \\ & \quad + m(a_2 - y) + n(a_3 - z) + p = 0, \\ & l(b_1 - x \cos \varphi) + m(b_2 - z + x \cos \varphi') \\ & \quad + n(b_3 - x \cos \varphi'' + y) + p \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

(81)

J'exprime que le point qui correspond à $x = \alpha$, $y = \lambda$, $z = \gamma$ décrit le plan $x = 0$; celui qui correspond à $\alpha' \beta' \gamma'$: $y = 0$, et celui qui correspond à $\alpha'' \beta'' \gamma''$: $z = 0$. En posant, pour abrégier,

$$\begin{aligned} U &= x + y \cos \varphi'' + z \cos \varphi', \\ V &= x \cos \varphi'' + y + z \cos \varphi, \\ W &= x \cos \varphi' + y \cos \varphi + z, \\ U_A &= \alpha + \beta \cos \varphi'' + \gamma \cos \varphi', \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

j'ai les six équations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} 2l(U - U_A) &= l(x - \alpha) + m(y - \beta') + n(z - \gamma'') - p, \\ 2m(V - V_B) &= l(x - \alpha) + m(y - \beta') + n(z - \gamma'') - p, \\ 2n(W - W_C) &= l(x - \alpha) + m(y - \beta') + n(z - \gamma'') - p, \\ m(W - W_B) + n(V - V_C) &= \cos \varphi [l(x - \alpha) + m(y - \beta') + n(z - \gamma'') - p], \\ n(U - U_C) + l(W - W_A) &= \cos \varphi' [l(x - \alpha) + m(y - \beta') + n(z - \gamma'') - p], \\ l(V - V_A) + m(U - U_B) &= \cos \varphi'' [l(x - \alpha) + m(y - \beta') + n(z - \gamma'') - p]. \end{aligned} \right.$$

D'où facilement

$$\frac{W - W_B}{V - V_B} + \frac{V - V_C}{W - W_C} = 2 \cos \varphi,$$

cylindre de révolution à génératrices perpendiculaires au plan des yz . C'est l'équation déjà trouvée.

Il y a une discussion analogue que je ne refais pas.

SURFACES DE STEINER.

Je reprends les axes rectangulaires, je me donne un point xyz et je cherche les coordonnées du symétrique $x'y'z'$ par rapport à la droite Δ définie comme d'habi-

tude par ses six coordonnées

$$X, Y, Z, L, M, N, \quad \rho = NY - MZ, \quad \dots,$$

$$x' = \frac{2\rho + x(\lambda^2 - Y^2 - Z^2) + 2yXY + 2zXZ}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$y' = \frac{2\rho' + y(Y^2 - Z^2 - X^2) + 2zYZ + 2xYX}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$z' = \frac{2\rho'' + z(Z^2 - Y^2 - X^2) + 2xZX + 2yYZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Il suffit de poser

$$2\rho = f_1(XYZ),$$

$$2\rho' = f_2(XYZ),$$

$$2\rho'' = f_3(XYZ)$$

pour retrouver les formules (12) en axes rectangulaires ;
mais pour cela il faut que

$$(13) \quad Xf_1 + Yf_2 + Zf_3 = 0,$$

c'est-à-dire qu'au lieu de traiter X, Y, Z comme indépendantes, il faut les lier par la relation (13) qui représente le cône directeur de la S_9 .

Du reste, étant donnée une surface S_9 , si d'un point $\alpha\beta\gamma$ on abaisse des perpendiculaires sur la génératrice $XYZLMN$, le pied a pour coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\rho + X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ y = \frac{\rho' + Y(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ z = \frac{\rho'' + Z(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}. \end{array} \right.$$

Or, sur la surface, on a des équations de la forme

$$\rho = -\Phi_1(XYZ), \quad \rho' = -\Phi_2, \quad \rho'' = -\Phi_3;$$

donc la courbe décrite par le pied de la perpendiculaire abaissée de $\alpha\beta\gamma$ sur les génératrices se trouve tracée

sur la surface de Steiner :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-\Phi_1 + X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ y = \frac{-\Phi_2 + Y(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ z = \frac{-\Phi_3 + Z(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \end{array} \right.$$

où l'on traite X, Y, Z comme indépendantes. Ceci donne une nouvelle propriété des surfaces S_6 .

Dans un prochain article, j'étudierai les S_6 qui possèdent une sextique de Cayley et les hyperboloïdes pour lesquels la sextique se décompose en six droites. Enfin j'étudierai les surfaces développables qui possèdent une infinité de points de Cayley ou, ce qui revient au même, les courbes gauches qui possèdent une infinité de podaires planes. On peut les déterminer facilement sans signe de quadrature.