NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 472-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__472_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

798.

(1867, p. 95.)

Trouver dans une sinusoïde (transformée d'une ellipse quand on déroule un cylindre sur un plan) des arcs à différence rectifiable. Quelle est la courbe qui pour la sinusoïde joue le même rôle que l'ellipse homofocale dans la théorie des arcs elliptiques à différence rectifiable?

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Cette question, demeurée non résolue dans ce Journal, a été traitée par M. G. Teixeira dans un article du *Periodico di Matematica*, Livorno, t. XIX, 1904, p. 275-277, nota sull' applicazione, etc. (Note sur l'application du théorème de Fagnano aux arcs du limaçon de Pascal et de la sinusoïde).

Cet article a été inséré au Tome II de la réimpression de l'Œuvre mathématique de M. G. Teixera, 1906, p. 346-349, et résumé dans le *Traité*, du même géomètre, des *Courbes spéciales remarquables*, t. II, 1909, p. 34-35.

J'en donnerai simplement un extrait relatif à la sinusoïde

$$y = a \sin \frac{x}{m}.$$

Pour déterminer l'arc compris entre le point O et le point M(x, y), on a l'équation

$$s = \int_0^y \sqrt{\frac{a^2 + m^2 - y^2}{a^2 - y^2}}\, dy,$$

ou, en faisant

$$y = a \sin\varphi, \qquad K = \frac{a}{\sqrt{a^2 + m^2}},$$

$$s = \sqrt{a^2 + m^2} \int_0^\varphi \sqrt{1 - K^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

et en posant

$$\sqrt{a^2 + m^2} = A, \qquad \int_0^\varphi \sqrt{1 - K^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = E(K, \varphi),$$

on a

$$s = A.E(K, C).$$

Ainsi l'arc de sinusoïde est représenté par l'arc d'une certaine ellipse.

Pour lui appliquer le théorème de Fagnano, soient M′ un autre point et B le premier sommet de la sinusoïde :

$$OM = A.E(K, \varphi); \qquad OM' = A.E(K, \psi);$$
$$OB = A.E\left(K, \frac{\pi}{2}\right),$$

et par conséquent l'égalité

$$E(K, \varphi) + E(K, \psi) - E\left(K, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{K^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2\varphi}},$$

démontrée dans la théorie des intégrales elliptiques, donne

$$OM + OM' - OB = OM - BM' = \frac{AK^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2\varphi}}.$$

quand les angles φ et ψ sous liés par la relation

$$\cos\varphi\cos\psi = \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-K^2}.$$

Or, on a

$$\frac{AK^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}}\quad\frac{y\sqrt{a^2-y^2}}{\sqrt{a^2+m^2-y^2}}=\frac{y^2}{T},$$

T représentant la longuenr MV de la tangente à la courbe au point M. Donc

$$OM - BM' = \frac{y^2}{T}$$

quand

$$\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi = \frac{\sqrt{a^2+m^2}}{m}.$$

Mais si MN est la normale en M et PL une perpendiculaire à MN menée du point P projection de M sur Ox, on a

$$y = MP = T\sin MVO,$$
$$PL = y\sin NMP = y\sin MVO,$$

d'où

$$OM - BM' = PL.$$

Notes. I. — En raison de l'importance de cette proposition, il serait intéressant de savoir qui en est l'auteur. La question 798, en effet, n'est pas signée, mais il est bien curieux qu'elle soit, comme par hasard, précédée à la même page de quelques questions proposées par Ch. Hermite, à qui je suis ainsi porté à l'attribuer, en attendant une preuve plus décisive.

II. Les exemples de courbes présentant des arcs à différence rectifiable ne se bornent pas à ceux qui viennent d'être indiqués. M. G. Teixeira (*Ibid.*, 1909, p. 216) a cité les rosaces

$$\rho = c\sin m\omega,$$

podaires d'épicycloïde.

III. Plusieurs articles du Journal se rapportent à des propositions tout à fait analogues. Je me bornerai à rappeler les noms d'auteurs :

N. Fuss; M. Chasles; Gudermann; B. Tortolini (1848, 80); J.-A. Serret; O. Terquem (1844, 425-435, 506); Strebor [W. Roberts] (1844, 506; 1848, 135-137; 1852, 182-186).

IV. La seconde Partie de la question 798 reste à résoudre. Je pense que la solution en sera aisée d'après les indications données ci-dessus.

2137.

(1909, p. 384.)

En désignant par p un nombre premier, par a et b deux nombres premiers entre eux, le quotient de la division de $a^p - b^p$ par $a - b$ a tous ses diviseurs premiers de la forme $P = kp + 1$, à l'exception du diviseur p qu'il admet dans l'hypothèse $a - b =$ mult. p, dans cette hypothèse seulement et qu'il admet alors une seule fois.

(G. F.)

SOLUTION

Par M. R. B.

1° Soit d'abord P un diviseur premier autre que p de $\dfrac{a^p - b^p}{a - b}$.

Je dis tout d'abord que P ne divise pas $a - b$. Supposons en effet qu'on ait

$$a - b \equiv 0 \pmod{P}$$

ou

$$b \equiv a \pmod{P};$$

on aura

$$\frac{a^p - b^p}{a - b} = a^{p-1} + a^{p-2} b + \ldots + b^{p-1} \equiv p a^{p-1} \pmod{P}.$$

P ne divise ni p ni a (car, dans ce dernier cas, il diviserait aussi b, et l'on suppose a et b premiers entre eux).

Donc P ne peut diviser pa^{p-1} ou $\frac{a^p - b^p}{a-b}$.

Il résulte de là que les diviseurs premiers autres que p du nombre $\frac{a^p - b^p}{a-b}$ sont les mêmes que les diviseurs premiers autres que p du nombre $a^p - b^p$.

Désignons maintenant par r une racine primitive de P. Soient α et β les indices respectifs de a et b, de sorte qu'on a

$$a \equiv r^\alpha \quad (\bmod P),$$
$$b \equiv r^\beta \quad (\bmod P),$$

avec

$$0 \leqq \alpha < P - 1, \qquad 0 \leqq \beta < P - 1$$

et

$$\alpha \neq \beta,$$

puisque $a - b$ n'est pas divisible par P.

On en tire

$$a^p - b^p \equiv r^{p\alpha} - r^{p\beta} \quad (\bmod P).$$

P divisant $a^p - b^p$, on doit donc avoir

$$p\alpha - p\beta \equiv 0 \quad [\bmod (P-1)]$$

ou

$$p(\alpha - \beta) = \lambda(P-1),$$

λ étant un nombre entier. Le nombre premier p divise l'un au moins des nombres λ et $P - 1$. Il ne peut diviser le premier. Supposons en effet qu'on ait

$$\lambda = p\lambda',$$

λ' étant un nombre entier, on aura

$$\alpha - \beta = \lambda'(P-1);$$

λ' ne peut être nul, puisque α et β sont différents; on aura donc

$$|\alpha - \beta| \geqq P - 1,$$

ce qui est incompatible avec les inégalités auquelles satisfont α et β. Le nombre p divise donc $P - 1$, et l'on peut écrire

$$P = kp + 1.$$

C. Q. F. D.

2° Cherchons maintenant à quelle condition $\frac{a^p - b^p}{a - b}$ sera divisible par p. Posons

$$a = b + h.$$

On en tire

$$\begin{aligned} \frac{a^p - b^p}{a - b} &= \frac{(b + h)^p - b^p}{h} \\ &= pb^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} b^{p-2} h + \ldots + pbh^{p-2} + h^{p-1}. \end{aligned}$$

Dans ce développement, tous les termes, à l'exception du dernier, ont des coefficients divisibles par p. On a donc

$$\frac{a^p - b^p}{a - b} \equiv h^{p-1} \pmod{p}.$$

Pour que le premier membre soit divisible par p, il faut et il suffit que h, c'est-à-dire $a - b$, soit divisible par p.

Dans cette hypothèse, on aura visiblement

$$\frac{a^p - b^p}{p(a - b)} \equiv b^{p-1} \pmod{p}.$$

Le second nombre n'est pas divisible par p; par conséquent, le nombre $\frac{a^p - b^p}{a - b}$ n'admet le diviseur p qu'une seule fois.

Toutes les parties de l'énoncé sont donc établies.

2138.

(1909, p. 384.)

Étant donné un point D *dans le plan d'un triangle* ABC, *on considère une sphère variable tangente à ce plan au* *point* D; *si, par chaque côté du triangle, on mène à cette sphère un second plan tangent, le lieu du point* M *commun aux trois plans ainsi obtenus est la conique focale de la conique de foyer* D *qui est inscrite au triangle* ABC.

(G. F.)

SOLUTION

Par Mlle Rita MURÈGE.

Appelons S la sphère variable tangente en D au plan ABC. Le cône de sommet M et circonscrit à S est un cône de révolution inscrit au tétraèdre MABC et, à cause du théorème de Dandelin, il coupe le plan ABC suivant la conique de foyer D inscrite au triangle ABC, conique qui est fixe. On retrouve, dès lors, un théorème connu : « Le lieu des sommets des cônes de révolution passant par une conique donnée est la conique focale de cette conique ».

Autres solutions par MM. BOUVAIST, KLUG, LEMAIRE et PARROD.

2139.

(1909, p. 384.)

Soient (E) *et* (H) *une ellipse et une hyperbole dont chacune est la focale de l'autre. Si* S *est un point du plan de l'hyperbole* (H) *par exemple, le cône de sommet* S *qui contient l'ellipse* (E) *admet comme lignes focales les tangentes menées du point* S *à l'hyperbole* (H).

(G. F.).

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soit T le point de contact d'une tangente à (H) issue de S; le cône de sommet T et de base (E) est un cône de révolution d'axe TS; les plans tangents menés par TS à ce cône sont tangents au cône de sommet S et de base (E). Ces plans sont tangents au cercle de l'infini, ce qui démontre la proposition.

Autres solutions par Mlle Rita MURÈGE, MM. KLUG et PARROD.

M. Klug fait observer qu'il a déjà publié le même théorème dans *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* (**1905**, p. 137).