

## Certificats d'analyse supérieure

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 10 (1910), p. 40-46

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1910\\_4\\_10\\_\\_40\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__40_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.**

---

**Lille.**

I. QUESTION DE COURS. — 1° *Démontrer que le produit*

$$z \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{r \frac{z}{n}}$$

*est convergent pour toute valeur de  $z$ .*

2° *Énoncer et démontrer les propriétés de la fonction*

$s(z)$  définie par ce produit, ainsi que de la fonction

$$\lambda(z) = \frac{s'(z)}{s(z)}.$$

3° Démontrer que l'on a  $\sin \pi z = e^{G(z)} s(z)$ ,  $G(z)$  étant une fonction entière. Déterminer cette fonction  $G(z)$ .

4° Relations entre les fonctions  $\lambda'(z)$  et  $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ . En déduire la somme des séries de la forme

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots,$$

$p$  étant un entier positif.

II. PROBLÈME. — On considère l'équation différentielle du deuxième ordre

$$(1) \quad y - xy' + \frac{x^2 y''}{2} - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0.$$

1° Démontrer qu'elle admet comme intégrale générale un trinôme du deuxième degré dont deux coefficients sont arbitraires.

2° Démontrer qu'elle admet en outre une solution singulière, dépendant d'une constante arbitraire, et satisfaisant à une équation du premier ordre

$$(2) \quad F(x, y, y') = 0.$$

3° Former l'équation (2); l'intégrer; chercher si elle admet elle-même une solution singulière, satisfaisant ou non à l'équation (1).

(Juillet 1909.)

### Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Définir un système complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaires et homogènes. Établir ses propriétés immédiates. Systèmes complets jacobiens. Démontrer qu'un système complet de  $m$  équations à  $m + n$  variables indépendantes admet  $n$  intégrales distinctes.

II. Intégrer l'équation aux dérivées partielles du

second ordre

$$(rx + p)(t + 1) - s(sx - q - y) = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système*

$$2x_2x_1^2p_1 + x_2^2x_4p_4 + x_2^2x_5p_5 = 0,$$

$$2x_2p_2 - x_4p_4 + x_5p_5 = 0,$$

$$x_2x_1^2p_3 + x_1x_3x_4p_4 + x_1x_3x_5p_5 = 0.$$

(Juin 1908.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. 1° Soient deux coniques S et S<sub>1</sub> ayant pour équations trinéaires respectives

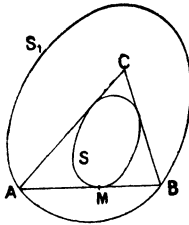
$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

$$(S_1) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

On considère un triangle ABC circonscrit à S ayant deux sommets A et B sur S<sub>1</sub>. Exprimer les coordonnées du point C au moyen de celles du point de contact M de AB avec S.

2° En se servant des formules précédentes, trouver la relation qui existe entre les racines a, b, c de l'équation en λ des deux coniques, s'il existe un triangle inscrit dans S<sub>1</sub> et circonscrit à S. Si cette relation est vérifiée, montrer qu'il existe alors une infinité de triangles ayant

Fig. 1.



la propriété précédente. Trouver la forme de la relation considérée quand on introduit les invariants simultanés  $\theta, \Delta, \theta_1, \Delta_1$  des deux coniques.

3° Appliquer à une ellipse  $S$  et à un cercle  $S_1$  ayant son centre sur le grand axe. Montrer qu'il y a deux cercles de centre donné  $\omega$  sur le grand axe et répondant à la question. Établir que,  $\omega$  se déplaçant sur le grand axe, l'enveloppe de ces deux cercles est un système de deux cercles.

II.  $U_1, U_2, U_3, U_4$  désignant quatre fonctions de la seule variable  $u$  et  $V_1, V_2, V_3, V_4$  quatre fonctions de la seule variable  $v$ , on considère la surface  $S$  définie par les équations

$$(1) \quad x = \frac{U_1 + V_1}{U_4 + V_4}, \quad y = \frac{U_2 + V_2}{U_4 + V_4}, \quad z = \frac{U_3 + V_3}{U_4 + V_4},$$

qui expriment en fonction de deux paramètres  $u$  et  $v$  les coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  d'un point de  $S$ .

1° Établir que les deux familles de courbes  $(u)$  et  $(v)$  sont conjuguées.

2° Indiquer quelle est la nature de la développable circonscrite à  $S$  le long d'une des courbes  $(u)$  ou  $(v)$ ; examiner le cas dans lequel l'une des fonctions  $U_i, V_i$  se réduit à une constante et celui dans lequel ces deux fonctions sont constantes.

3° Déterminer les lignes asymptotiques de  $S$  dans le cas particulier où les formules (1) sont les suivantes :

$$x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = u^3 - v^3.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la fonction  $u$  de  $z$  définie par l'équation

$$u^3 + \frac{3}{\sqrt{2}}(1+z)u + 1 - z^2 = 0.$$

Soient  $u_1, u_2, u_3$  les racines de cette équation pour  $z = 0$ ;  $u_1$  est réelle et négative; le coefficient de  $i$  dans  $u_2$  est positif, dans  $u_3$  il est négatif.

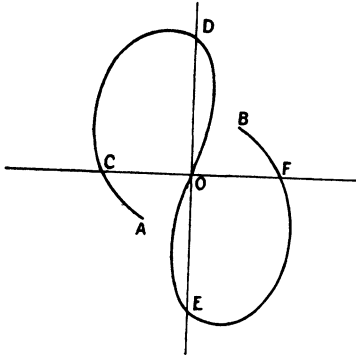
1° Trouver les points de ramification. Indiquer quelles sont les déterminations qui se permutent autour de chacun d'eux. (On remarquera que l'équation n'a jamais de racine réelle pour  $z$  purement imaginaire.)

2° Trouver, dans le voisinage du point  $z = -1$ , les trois

premiers termes du développement des trois racines suivant les puissances fractionnaires de  $z + 1$ .

3° Tracer des coupures qui rendent uniforme chacune

Fig. 2.



des trois déterminations; A, C, D, E, F, B désignant les points dont les coordonnées sont respectivement

$$\begin{aligned} &(-1, -1), \quad (-2, 0), \quad (0, 3), \quad (0, -3), \\ &(2, 0), \quad (+1, +1), \end{aligned}$$

on part du point A avec la détermination  $u_1$ , en suivant le chemin indiqué ci-contre ACDOEFB; avec quelle détermination arrive-t-on en B?

(Juillet 1908.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Indiquer les diverses valeurs que peut prendre l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dz}{(z-3)\sqrt{1-z^2}}$$

quand on va dans le plan complexe du point  $z = 0$  au point  $z = i$  en suivant un chemin arbitraire.

II. On considère la surface S enveloppe des plans

$$2\alpha x + 2\beta y + (1 - x^2 - \beta^2)z = 2f(\alpha, \beta)$$

qui dépendent des deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

1° Trouver l'expression la plus générale de  $f(\alpha, \beta)$  de manière que les lignes  $\alpha = \text{const.}$ ,  $\beta = \text{const.}$  soient les lignes de courbure de la surface; ce sont alors des courbes planes.

2° Déterminer tous les cas où ces lignes de courbure sont circulaires.

3° Parmi ces dernières surfaces il en existe une dont les rayons de courbure sont en chaque point égaux et de signes contraires. Trouver ses lignes asymptotiques.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On coupe l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

par un plan; déterminer les coordonnées du centre de gravité de l'un des volumes limités par le plan et l'ellipsoïde. En déduire les coordonnées du centre de gravité du volume limité par l'ellipsoïde et deux plans quelconques n'ayant aucun point commun à l'intérieur de l'ellipsoïde.

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On considère la surface  $\Sigma$ , enveloppe du plan P,

$$2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - 1)z + (\beta^2 - \alpha^2)(\alpha^2 + \beta^2 + 3) = 0,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres.

1° Calculer les coordonnées du point de contact M de P avec son enveloppe et l'élément linéaire de la surface.

2° Déterminer les lignes de courbure de  $\Sigma$  (ces lignes sont planes) et aussi ses lignes asymptotiques. Que sont ces lignes?

3° Les plans des deux lignes de courbure qui passent en M coupent les plans coordonnés  $yOz$  et  $xOz$  suivant deux droites D et  $\Delta$  dont on demande les trajectoires orthogonales.

4° Montrer que les droites perpendiculaires à P qui s'appuient sur D et  $\Delta$  engendrent une congruence de normales: quelles sont les surfaces normales à ces droites?

II. Étant donnés trois points P, Q, R sur une cubique plane, déterminer un triangle ABC dont les sommets

soient sur la courbe et dont les côtés passent respectivement par les points donnés P, Q, R; cas où les trois points P, Q, R sont en ligne droite.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. On envisage la fonction elliptique  $f(u)$  admettant les mêmes périodes données et les mêmes pôles que la fonction  $pu$  et qui, dans le voisinage de  $u = 0$ , se développe par la formule

$$f(u) = \frac{1}{u^6} + \frac{1}{u^4} + \left(1 + \frac{3}{20} g_2\right) \frac{1}{u^2} + \sum_{n=2}^{n=\infty} A_n u^n,$$

dans laquelle les coefficients  $A_n$  ont des valeurs constantes dont la première  $A_0$  est supposée donnée et où  $g_2$  désigne la constante qui figure dans le développement connu

$$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \dots$$

de  $pu$ .

1° Déterminer la décomposition de  $f(u)$  en éléments simples.

2° Exprimer la fonction  $f(u)$  au moyen de la fonction  $pu$ .

3° Déterminer la fonction primitive et les dérivées successives de  $f(u)$ .

II. Étudier, dans le voisinage de l'origine, la courbe représentée en coordonnées cartésiennes par l'équation

$$xy^2(y-x)^2 + 2x^2(y^4-x^4) - 3y^7 + x^8 = 0.$$

(Juillet 1909.)