Nouvelles annales de mathématiques

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1910)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 401-406

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__401_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1910).

Sujets des compositions.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Dans un plan donné, il y a un infinité de cercles (Γ) *orthogonaux à tous les cercles* (C) *qui passent par deux points donnés* P, P′ *dans ce plan.*

A tout point M *correspond un point* M′ *tel que* M *et* M′

soient conjugués harmoniques par rapport à tout cercle (Γ).

Donner la construction géométrique de ces points.

1° *Trouver le lieu de* M *et* M′ *quand* MM′ *a une longueur donnée* l ;

2° *Trouver le lieu de* M′ *quand* M *décrit une droite* (D). *On pourra supposer successivement que la droite* (D) *est perpendiculaire à* PP′, *qu'elle passe par l'un des point* P *ou* P′ ; *qu'elle rencontre* PP′ *en un point autre que* P *ou* P′, *étant oblique à* PP′ *et enfin que* (D) *est parallèle à* PP′ ;

3° *Lieu de* M′ *quand* M *décrit une parabole passant par* P *et* P′ *et dont l'axe est perpendiculaire à* PP′.

Dans chacun des cas examinés on étudiera le déplacement de M′, *celui de* M *étant supposé connu ;*

4° *On considère dans le plan donné un nombre quelconque de cercles* (C), *soient* (C_1), (C_2), ..., (C_p) *et autant de coefficients numériques donnés* a_1, a_2, ..., a_p ; *puis* q *cercles* (Γ) : (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_q) *et des coefficients* α_1, α_2, ..., α_q. *Peut-on toujours déterminer, dans le plan donné, deux points* S_1, S_2, *tels que la somme des puissances d'un point quelconque* X *du plan par rapport à tous ces cercles, chaque puissance étant multipliée par le coefficient correspondant, soit égale à la somme des carrés des distances de ce point* X *aux deux points cherchés* S_1. S_2, *multipliée par la demi-somme des coefficients donnés ? En supposant que les cercles* (C) *et* (Γ) *appartiennent aux deux familles considérées, trouver les conditions pour que* S_1 *et* S_2 *soient deux points conjugués* M, M′.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On considère deux paraboloïdes hyperboliques équilatères égaux, P *et* Q, *qui ont même axe et même sommet.*

1° *On demande de trouver toutes les droites* D *dont les conjuguées* D′ *et* D″ *par rapport à* P *et* Q *sont dans un même plan (on ne considère que des droites réelles situées à distance finie). Montrer que deux droites* D′ *et* D″ *qui correspondent à une même droite* D *sont à la même distance de l'axe des paraboloïdes, qu'elles font le même angle avec l'axe et que leurs projections sur un plan perpendiculaire à cet axe font un angle constant.*

2° *On considère une droite* D *particulière, que l'on désigne par* D_1; *on prend sa conjuguée* D_2 *par rapport au paraboloïde* P, *puis on prend la conjuguée* D_3 *de* D_2 *par rapport au paraboloïde* Q, *et ainsi de suite, de telle sorte qu'une droite* D_{2p} *soit conjuguée de la droite* D_{2p-1} *par rapport à* P *et qu'une droite* D_{2q+1} *soit conjuguée de la droite* D_{2q} *par rapport à* Q; *étudier la distribution de ces droites.*

3° *Une droite* D *se déplace en faisant un angle constant avec l'axe des paraboloïdes et de façon que les surfaces engendrées par* D' *et* D'' *fassent un angle constant au point commun à* D' *et* D''; *quelle surface engendre* D; *quelles surfaces engendrent* D' *et* D'' *et quel est le lieu du point commun à* D' *et* D''; *ce lieu peut-il être situé sur la surface engendrée par* D? (*On indiquera un mode de génération simple de ces diverses surfaces.*)

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

On considère la famille de surfaces du second degré

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \text{const.},$$

a, b, c étant des nombres positifs distincts et donnés, les axes de coordonnées étant rectangulaires; on désigne par (E) *l'équation aux dérivées partielles des surfaces* (S) *orthogonales à cette famille de surfaces du second degré et par* (γ) *les courbes caractéristiques de l'équation* (E) :

1° *Exprimer les coordonnées des points d'une surface* (S) *à l'aide de deux paramètres u et v; montrer qu'on peut adopter les expressions de la forme*

$$x = f(v) f_1(u), \qquad y = \varphi(v)\varphi_1(u), \qquad z = \psi(v)\psi_1(u),$$

et que la recherche des lignes asymptotiques de toute surface (S) *se ramène aux quadratures.*

2° *Quelle est la condition pour qu'une courbe imposée, distincte d'une caractéristique,*

$$x = f(v), \qquad y = \varphi(v), \qquad z = \psi(v),$$

soit ligne asymptotique d'une surface (S)?

La détermination des familles d'asymptotiques distinctes *des caractéristiques, des surfaces* (S), *peut se ramener à la recherche des solutions de trois équations différentielles linéaires analogues.*

L'intégration de ces équations linéaires peut-elle se ramener aux quadratures?

Une famille d'asymptotiques a-t-elle une enveloppe?

Comment trouvera-t-on les surfaces (S) *dont une famille d'asymptotiques est douée d'enveloppe?*

Examiner les particularités de la surface et de ses asymptotiques dans le voisinage de l'enveloppe, en se bornant aux surfaces dont les coordonnées correspondent à des fonctions holomorphes; donner explicitement des exemples très simples.

3° *Déterminer les surfaces* (S) *dont les asymptotiques d'une famille sont des caractéristiques* (γ). *Définir géométriquement ces surfaces.*

4° *Soient* (S_1) *une surface* (S) *choisie et* (Γ_1) *les développables circonscrites à* (S_1) *le long des caractéristiques génératrices* (γ) *supposées non asymptotiques.*

On réalise une déformation déterminée de la surface (S_1) *de telle sorte que tout point* M *de cette surface décrive la génératrice rectiligne de la développable* (Γ_1) *tangente en ce point, et l'on désigne par* M_1 *la position de* M *après la déformation, par* (Σ_1) *la surface obtenue.*

Dans le cas particulier où l'on choisit le point M' *sur l'arête de rebroussement de la développable* (Γ_1), *on obtient une surface* (Σ_1) *particulière, soit* (Σ_0). *Montrer qu'au réseau tracé sur* (S_1) *par les courbes* (γ) *et leurs conjuguées, correspond sur* (Σ_0) *un réseau conjugué.*

5° *Déterminer les déformations* (S_1, Σ_1) *faisant correspondre une courbe* (γ) *de* (S_1) *et possédant la propriété précédente de la déformation* (S_1, Σ_0).

Montrer que ces déformations associent à toute surface (S_1) *une famille à un paramètre de surfaces* (Σ_1) *dont les asymptotiques se correspondent, exception étant faite pour certaines surfaces* (S_1) *particulières que l'on caractérisera.*

Trouver celles de ces familles Σ_1 *dont les lignes asymptotiques correspondent aux asymptotiques de la surface* (S_1) *initiale et les définir géométriquement.*

N. B. *On rappelle que l'équation différentielle des lignes asymptotiques, en coordonnées curvilignes, est*

$$\begin{vmatrix} x''_{u^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{u^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{u^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} du^2 + 2 \begin{vmatrix} x''_{uv} & x'_u & x'_v \\ y''_{uv} & y'_u & y'_v \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} x''_{v^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{v^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{v^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} dv^2 = 0.$$

MÉCANIQUE.

Mouvement d'un corps solide pesant fixé par un de ses points O *autour duquel il peut tourner librement et assujetti à toucher un plan horizontal fixe* H; *les liaisons sont supposées sans frottement et le solide au-dessus du plan* H.

I. *Le solide est de révolution, généralement non homogène, et est suspendu par un point de son axe de figure.*

a. Trouver les équations du mouvement et indiquer les circonstances générales de ce mouvement lorsque les conditions initiales sont arbitraires.

Discuter complètement lorsque le solide est abandonné sans vitesses initiales; examiner les cas particuliers dans lesquels le solide admet, soit un plan passant par l'axe de figure, soit un plan mené par O *et perpendiculairement à cet axe, comme plan de symétrie de masses; indiquer nettement, par des figures, la nature du mouvement du point de contact du solide sur le plan* H.

b. Lorsque l'axe de figure du solide est axe de symétrie des masses, discuter le mouvement, les conditons initiales étant arbitraires; examiner le cas particulier où le solide est homogène.

APPLICATION. — *Le mouvement instantané du solide est une rotation que l'on peut toujours décomposer en une rotation, soit* ω, *portée par l'axe du solide et en une rotation verticale.*

On suppose, en se plaçant dans le cas (b), *que les conditions initiales vérifient la relation*

$$2T = C\omega^2,$$

$2T$ *étant la force vive,* C *le moment d'inertie du solide par rapport à son axe.*

Calculer explicitement le mouvement, noter ses particularités et indiquer, dans les deux cas possibles, comment ce mouvement peut être imprimé au solide.

II. *Le solide ayant une forme quelconque, on désigne par* (Γ) *la courbe située sur le solide et lieu des points de contact* M *avec le plan* H ; *on exprime les coordonnées, par rapport aux axes principaux d'inertie relatifs au point fixe* O, *d'un point quelconque de cette courbe à l'aide d'un paramètre u et l'on définit la position du solide à l'aide du paramètre u et de l'orientation du plan vertical passant par* OM.

Trouver les équations donnant ces paramètres et indiquer les circonstances générales du mouvement.

Oon pourra attacher au solide, en tout point M *de la courbe* (Γ), *un trièdre auxiliaire* (T) *ayant comme arête la normale en* M *à la surface du solide, l'une des faces passant par le point fixe* O ; *et regarder le mouvement du solide comme résultant d'un mouvement relatif par rapport au trièdre* (T) *et d'un mouvement d'entraînement de ce trièdre.*