

FRÉCHET

**Extension au cas des intégrales multiples  
d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 10  
(1910), p. 241-256

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1910\\_4\\_10\\_\\_241\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__241_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[C2g]

**EXTENSION AU CAS DES INTÉGRALES MULTIPLES  
D'UNE DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DUE A STIELTJES;**

PAR M. FRÉCHET, à Poitiers.

M. Riesz a montré récemment <sup>(1)</sup> comment on pouvait se servir d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes pour représenter les *fonctionnelles linéaires*. Je me propose de généraliser ici cette définition de l'intégrale de Stieltjes au cas des intégrales multiples. La généralisation obtenue pourrait servir de même à représenter ce que j'ai appelé <sup>(2)</sup> les *fonctionnelles d'ordre n*. Mais cette nouvelle définition de l'intégrale multiple, qui a son intérêt en elle-même, peut être exposée d'une manière tout élémentaire qui a sa place naturelle dans ces *Annales*. Ce que je dirai de l'intégrale d'ordre  $n$  s'appliquera, en particulier pour  $n = 1$ , à l'intégrale de Stieltjes, qu'il est donc inutile d'étudier à part.

1° *Fonctions à variation n<sup>ième</sup> bornée.* — Soit une fonction de  $n$  variables  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bien définie dans le domaine T,

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_n \leq x_n \leq b_n.$$

Effectuons une division D de ce domaine en divisant chaque intervalle de variation, tel que  $(a_p, b_p)$  en intervalles partiels limités par les coordonnées

$$a_p = x_p^{(0)} < x_p^{(1)} < x_p^{(2)} \dots < x_p^{(n_p)} + b_p.$$

Nous appellerons *variation n<sup>ième</sup>* de la fonction  $u$  rela-

(1) F. RIESZ, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires* (*Comptes rendus*, 29 novembre 1909).

(2) FRÉCHET, *Toute fonctionnelle continue est développable en série de fonctionnelles d'ordres entiers* (*Comptes rendus*, 18 janvier 1909).

tivement au mode de division D, la quantité

$$\sum_{i,j,\dots,r,s} \left| \begin{matrix} (n) \\ \Delta \\ i,j,\dots,r,s \end{matrix} u \right|$$

où

$$\begin{aligned} \begin{matrix} (n) \\ \Delta \\ i,j,\dots,r,s \end{matrix} u &= u(x_1^{(i+1)}, x_2^{(j+1)}, \dots, x_{n-1}^{(r+1)}, x_n^{(s+1)}) \\ &- [u(x_1^{(i)}, x_2^{(j+1)}, \dots, x_n^{(s+1)}) + u(x_1^{(i+1)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(s+1)}) + \dots \\ &\quad + u(x_1^{(i+1)}, x_2^{(j+1)}, \dots, x_{n-1}^{(r)}, x_n^{(s)})] \\ &+ [u(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k+1)}, \dots, x_n^{(s+1)}) + \dots \\ &\quad + u(x_1^{(i+1)}, x_2^{(j+1)}, \dots, x_{n-2}^{(q+1)}, x_{n-1}^{(r)}, x_n^{(s)})] - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} [u(x_1^{(i+1)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(s)}) + \dots \\ &\quad + u(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{n-1}^{(r)}, x_n^{(s+1)})] \\ &+ (-1)^n u(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(s)}). \end{aligned}$$

Nous dirons que la fonction  $u$  est à *variation*  $n^{\text{ième}}$  *bornée* dans T si, quelle que soit la division D, la variation  $n^{\text{ième}}$  correspondante reste inférieure à un nombre fixe. Cette variation  $n^{\text{ième}}$  aura dans ce cas une borne supérieure V que nous appellerons la *variation*  $n^{\text{ième}}$  *totale* de  $u$  dans T.

2° *Exemples de fonctions à variation*  $n^{\text{ième}}$  *bornée*. — I. Si la dérivée  $\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$  existe et est continue dans T, la fonction  $u$  est à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée. En effet, il est facile de voir qu'en appliquant la formule de Taylor un nombre suffisant de fois, on a

$$\begin{aligned} \begin{matrix} (n) \\ \Delta \\ i,j,\dots,r,s \end{matrix} u &= \frac{\partial^n u(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(s)})}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \\ &\times (x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)})(x_2^{(j+1)} - x_2^{(j)}) \dots (x_n^{(s+1)} - x_n^{(s)}) \end{aligned}$$

avec

$$x_1^{(i)} \leq \xi_1^{(i)} \leq x_1^{(i+1)}, \quad \dots, \quad x_n^{(s)} \leq \xi_n^{(s)} \leq x_n^{(s+1)};$$

c'est, par exemple, dans le cas de  $n = 2$ , l'égalité au moyen de laquelle on démontre que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$ .

Si donc on appelle  $Q$  le maximum de  $\left(\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n}\right)$  dans  $T$ , on a

$$\sum_{i, \dots, s} \left| \Delta_{i, j, \dots, r, s}^{(n)} \right| \leq Q \sum_{i, \dots, s} (x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}) \dots (x_n^{(s+1)} - x_n^{(s)}) \\ = Q(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n).$$

Le dernier membre donne en outre une limite supérieure de la variation  $n^{\text{ième}}$  totale  $V$ .

II. D'après les définitions ordinaires, pour définir  $\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$ , il faut d'abord admettre l'existence des dérivées d'ordre inférieur. Il est pourtant facile de former une fonction non dérivable à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée. Il suffit de prendre la fonction

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \dots + u_n(x_n).$$

On a

$$\Delta_{i, j, \dots, s}^{(n)} u \equiv 0$$

quelles que soient les fonctions  $u_1, u_2, \dots$ , quand même elles seraient extrêmement discontinues. On voit même que la variation totale d'une telle fonction est nulle.

III. Sans que la fonction  $u$  soit nécessairement dérivable, il peut arriver qu'elle vérifie une condition analogue à celle qui est connue sous le nom de *condition de Lipschitz* pour les fonctions d'une variable, à savoir

$$\Delta_{i, j, \dots, s}^{(n)} u \leq Q |x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}| \dots |x_n^{(s+1)} - x_n^{(s)}|,$$

où  $Q$  est un nombre fixe et où les  $x$  sont quelconques dans leurs intervalles de variation respectifs. Alors,

comme dans I, la fonction  $u$  sera à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée.

IV. Le produit  $u \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_p) \cdot g(x_{p+1}, \dots, x_n)$  où  $f$  est à variation  $p^{\text{ième}}$  bornée et  $g$  à variation  $(n-p)^{\text{ième}}$  bornée est à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée et la variation  $n^{\text{ième}}$  totale de  $u$ , est au plus égale au produit de la variation  $p^{\text{ième}}$  totale de  $f$  par la variation  $(n-p)^{\text{ième}}$  totale de  $g$ . Car

$$\begin{aligned} \sum_{i, \dots, n} \left| \begin{matrix} (n) \\ \Delta \\ i, \dots, l, m, \dots, s \end{matrix} u \right| &= \sum_{i, \dots, n} \left| \begin{matrix} (p) \\ \Delta \\ i, \dots, l \end{matrix} f \right| \left| \begin{matrix} (n-p) \\ \Delta \\ m, \dots, s \end{matrix} g \right| \\ &= \left( \sum_{i, \dots, l} \left| \begin{matrix} (p) \\ \Delta \\ i, \dots, l \end{matrix} f \right| \right) \left( \sum_{m, \dots, s} \left| \begin{matrix} (n-p) \\ \Delta \\ m, \dots, s \end{matrix} g \right| \right). \end{aligned}$$

V. La somme ou la différence de deux fonctions à variations  $n^{\text{ièmes}}$  bornées est aussi à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée et sa variation  $n^{\text{ième}}$  totale est au plus égale à la somme de leurs variations  $n^{\text{ième}}$  totales. Car

$$\sum \left| \begin{matrix} (n) \\ \Delta \\ u + v \end{matrix} \right| \leq \sum \left| \begin{matrix} (n) \\ \Delta \\ u \end{matrix} \right| + \sum \left| \begin{matrix} (n) \\ \Delta \\ v \end{matrix} \right|.$$

VI. Si l'on ajoute à une fonction à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée,  $u$ , une fonction de moins de  $n$  variables,  $v$ , la somme est à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée et sa variation  $n^{\text{ième}}$  totale est exactement égale (et non au plus égale, comme dans § V) à la variation  $n^{\text{ième}}$  totale de  $u$ . Car  $\Delta^{(n)} v \equiv 0$ .

3° *Propriété des fonctions à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée.* — Si une fonction est à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée, sa valeur n'est pas nécessairement bornée comme on le voit pour la fonction  $u(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1 - a_1}$  pour  $x_1 > a_1$ , = 0 pour  $x_1 = a_1$ .

Elle n'est même pas nécessairement à variation  $p^{\text{ième}}$  bornée par rapport à  $p$  de ses variables, comme le montre pour  $p = 1$  l'exemple II. (Une fonction à variation première bornée est une fonction à variation bornée dans la terminologie de M. Jordan, dont la nôtre n'est qu'une extension au cas de plusieurs variables.) Mais on peut tourner ainsi la difficulté. Bornons-nous, pour simplifier, au cas de deux variables.

Étant donnée une fonction à variation seconde bornée  $u(x, y)$ , on peut, en lui ajoutant une somme de fonctions d'une variable, la transformer en une fonction  $v(x, y)$  ayant même variation seconde totale, et à variation (première) bornée par rapport à chacune de ses variables.

Soit en effet  $a \leq x \leq b$ ,  $a' \leq y \leq b'$  le domaine T. Il suffit de poser

$$v(x, y) = u(x, y) - u(b, y) - u(x, b') + u(b, b')$$

et de voir que  $v(x, y)$  est par exemple à variation bornée par rapport à  $y$ . Pour cela écrivons la variation seconde de  $v$  obtenue en divisant T par les abscisses,  $a, r, b$ , et les ordonnées  $y_0, \dots, y_n$

$$\begin{aligned} \sum \left| \overset{(2)}{\Delta} v \right| &= \sum_i |v(b, y_{i+1}) - v(b, y_i) - v(x, y_{i+1}) + v(x, y_i)| \\ &+ \sum_i |v(x, y_{i+1}) - v(x, y_i) - v(a, y_{i+1}) + v(a, y_i)|. \end{aligned}$$

On a

$$\sum \left| \overset{(2)}{\Delta} v \right| \leq V$$

fixe indépendant de  $x$  et

$$v(b, y) = 0.$$

Donc, *a fortiori*,

$$\sum_i |\nu(x, y_{i+1}) - \nu(x, y_i)| \leq V.$$

4° *Calcul de la variation totale.* — Montrons d'abord que si  $\nu$ ,  $\nu'$  sont les  $n^{\text{ièmes}}$  variations qui correspondent à deux divisions  $D, D'$  dont l'une  $D'$  comprend tous les traits de division de  $D$  et en outre d'autres, on a  $\nu' \geq \nu$ . Il suffit de le démontrer quand  $D'$  comprend tous les traits de division de  $D$  et en outre seulement une division marquée par exemple par l'introduction pour la variation de  $x$ , de  $x'_1$  entre  $x_1^{(i)}$  et  $x_1^{(i+1)}$ . Alors  $\nu'$  est une somme de trois parties, l'une qui contient  $x_1^{(i)}$  sans  $x_1^{(i+1)}$  ni  $x'_1$ , l'autre  $x_1^{(i+1)}$  sans  $x_1$  ni  $x'_1$  la dernière qui est de la forme

$$|S(x'_1) - S(x_1^{(i)})| + |S(x_1^{(i+1)}) - S(x'_1)|.$$

Dans  $\nu$  se retrouvent les deux premières parties et la dernière se réduit à  $|S(x_1^{(i+1)}) - S(x_1^{(i)})|$ . Comme la valeur absolue d'une somme est au plus égale à la somme des valeurs absolues de ses parties, on a bien  $\nu \leq \nu'$ .

Ceci étant, remarquons que  $V$ , la variation  $n^{\text{ième}}$  totale, étant la borne supérieure des quantités  $\nu$  quand  $D$  est quelconque, il y a pour toute valeur de  $p$  une division  $D_p$  telle que la variation  $n^{\text{ième}}$  correspondante soit comprise entre  $V$  et  $V - \frac{1}{p}$ . Ajoutons à  $D_p$ , s'il est nécessaire, d'autres traits de division, de façon que dans la division  $D'_p$  obtenue, la dimension maximum des intervalles soit  $< \frac{1}{p}$ .

La variation  $n^{\text{ième}}$  correspondante,  $\nu'_p$  étant au moins égale à celle qui correspond à  $D_p$ , sera  $\geq V - \frac{1}{p}$  et bien entendu restera  $\leq V$  la borne supérieure. Alors on voit

que  $V'_p$  tend vers  $V$  quand  $p$  croît indéfiniment. Donc il y a une suite de divisions  $D'_p$  dont la dimension maximum des intervalles partiels tend vers zéro et dont les variations  $n^{\text{ième}}$  correspondantes tendent vers  $V$ . Le même raisonnement prouve que si  $u$  n'était pas à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée, on pourrait former une suite de divisions  $D'_p$  pour lesquelles  $v'_p$  croît indéfiniment.

DÉFINITION DE L'INTÉGRALE  $\int_{\mathbf{T}} f d_n u.$

Soient maintenant  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $u(x_1, \dots, x_n)$  deux fonctions bien définies dans le domaine  $\mathbf{T}$ . Considérons la somme

$$s = \sum_{i,j,\dots,s} f(\xi_1^{(i)}, \xi_1^{(j)}, \dots, \xi_n^{(s)}) \left[ \Delta_{i,j,\dots,s}^{(r)} u(x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(s)}) \right]$$

où  $\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(s)}$  sont des nombres respectivement compris entre  $x_1^{(i)}$  et  $x_1^{(i+1)}, \dots, x_n^{(s)}$  et  $x_n^{(s+1)}$ . Si, quel que soit le choix des  $\xi$  et quelle que soit la suite des divisions  $D$  adoptée, la quantité  $s$  tend vers une limite bien déterminée quand la dimension maximum  $\epsilon$  des intervalles partiels de  $D$  tend vers zéro, nous désignerons cette limite par la notation

$$\int_{\mathbf{T}} f d_n u \text{ ou } \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n u(x_1, \dots, x_n).$$

Nous allons voir que c'est ce qui arrive si  $u$  étant une fonction à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée, on prend pour  $f$  une fonction continue quelconque dans  $\mathbf{T}$ . En effet, soit  $V$  la variation  $n^{\text{ième}}$  totale de  $u$ ,  $\mu$  le maximum de  $|f|$  dans  $\mathbf{T}$ . On a d'abord  $|s| < \mu V$ . Si donc on prend une suite de divisions de  $\mathbf{T}$  :  $D'_1, D'_2, \dots$ , dont les di-



mensions partielles tendent vers zéro, les sommes  $s$  correspondantes :  $s'_1, s'_2, \dots$  restent bornées. Soit  $\sigma$  leur plus grande limite. Alors on pourra extraire de  $D'_1, D'_2, \dots$ , une suite  $D_1, D_2, \dots$ , telles que les sommes  $s_1, s_2, \dots$  correspondantes tendent vers  $\sigma$ . Montrons maintenant que si l'on choisit une autre suite de divisions  $\delta_1, \delta_2, \dots$ , dont la plus grande des dimensions partielles tend vers zéro, les sommes correspondantes  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ , tendent aussi vers  $\sigma$ .

En effet, supposons que pour  $m > p$ , les divisions de  $D_m$  et  $\delta_m$  aient des dimensions assez petites pour que dans chacune d'elles l'oscillation de la fonction continue  $f$  soit inférieure à un nombre donné  $\omega$ . Combinons maintenant toutes les divisions de  $D_m, \delta_{m'}$  en un système de divisions  $C_{m,m'}$ . Alors chaque division de  $D_m$  se trouve partagée en un certain nombre de divisions de  $C_{m,m'}$  et son  $\Delta^{(n)} u$  sera la somme des  $\Delta_u^{(n)}$  relatifs à ces divisions de  $C_{m,m'}$ . De même pour  $\delta_{m'}$ . De sorte qu'on aura

$$s_m - \sigma_{m'} = \sum [f(\xi_1, \dots, \xi_n) - f(\eta_1, \dots, \eta_n)] \Delta_u^{(n)},$$

où  $\Delta^{(n)} u$  est relatif à l'une quelconque  $\alpha$  des divisions de  $C_{m,m'}$ , où  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  est un point de la division de  $D_m$  qui contient  $\alpha$  et  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  un point de la division de  $\delta_{m'}$  qui contient  $\alpha$ . Si maintenant  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  est un point de  $\alpha$ , on a par hypothèse

$$|f(\xi_1, \dots, \xi_n) - f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)| < \omega,$$

$$|f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) - f(\eta_1, \dots, \eta_n)| < \omega;$$

d'où

$$|s_m - \sigma_{m'}| < 2\omega V \quad \text{pour} \quad m \text{ et } m' > p.$$

Si  $m'$  restant fixe,  $m$  croît indéfiniment, on aura enfin

$$|\sigma - \sigma_{m'}| < 2\omega V \quad \text{pour} \quad m' > p_1.$$

6° *Simplification du calcul de l'intégrale.* —

I. Dans le cas où  $u$  a une dérivée  $\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$  bien déterminée et continue, la définition que nous avons introduite perd tout son intérêt, car elle se ramène à une définition plus simple connue. On a en effet

$$\Delta_{i, \dots, s}^{(n)} u = \frac{\partial^n u(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(s)})}{\partial x_1 \dots \partial x_n} (x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}) \dots (x_n^{(s+1)} - x_n^{(s)}).$$

Alors  $\int_T f d_n u$  est la limite de

$$\sum f(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(s)}) \frac{\partial^n u(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(s)})}{\partial x_1 \dots \partial x_n} (x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}) \dots (x_n^{(s+1)} - x_n^{(s)});$$

donc

$$\int_T f d_n u = \int_T \left( f \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right) dx_1 \dots dx_n.$$

II. Dans le cas précédent, l'intégrale peut s'écrire

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \left[ \dots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left( dx_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} f \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} dx_n \right) \dots \right].$$

Si en particulier  $f$  est de la forme

$$f = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n),$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) d \dots du(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1) \left[ dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(x_2) \left[ dx_2 \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left[ dx_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x_n) \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} dx_n \right] \dots \right] \right] \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1) dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(x_2) dx_2 \int \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \\ & \quad \times dx_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x_n) dx_n u(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

où le symbole  $d_{x_i} \psi(x_1, \dots, x_n)$  indique que dans  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  on ne considère que  $x_i$  comme variable. Cette formule étant démontrée lorsque  $u$  a une dérivée  $\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$  continue, cherchons à la démontrer pour le cas général.

III. Soit donc  $u(x_1, \dots, x_n)$  une fonction à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée dans  $T$  et  $\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)$  des fonctions respectivement continues dans  $T$ . Peut-on encore écrire

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) d_{x_1} \dots d_{x_n} u(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1) d_{x_1} \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(x_2) d_{x_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x_n) d_{x_n} u(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Il est d'abord nécessaire que cette expression ait un sens. Or, par exemple,  $u$ , qui est à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée, n'est pas toujours à variation première bornée par rapport à  $x_1$ , de sorte qu'il n'est pas sûr que l'on puisse déjà donner un sens à la première intégrale à effectuer

$$\int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x_n) d_{x_n} u.$$

On peut cependant se débarrasser de cette difficulté. Mais, pour ne pas compliquer les raisonnements, nous nous bornerons au cas de  $n = 2$  et nous examinerons la validité de l'égalité

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_a^b \int_{a'}^{b'} \varphi(x) \psi(y) d_x d_y u(x, y) \\ &= \int_a^b \varphi(x) d_x \int_{a'}^{b'} \psi(y) d_y u(x, y). \end{aligned}$$

Nous avons vu (n° 3) que, sans changer la valeur du premier membre, on peut remplacer la fonction à

variation seconde bornée  $u(x, y)$  par une fonction à variation seconde bornée qui est en outre à variation (première) bornée par rapport à  $x$  et  $y$  séparément et en outre nulle pour  $x = b$  ou  $y = b'$ . Nous allons montrer que si l'on remplace  $u$  par une telle fonction, l'égalité (1) a un sens et est exacte.

D'abord

$$\int_{a'}^{b'} \psi(y) d_y u(x, y)$$

a un sens et représente une fonction de  $x$  :  $\theta(x)$  bien déterminée entre  $a$  et  $b$ . Le second membre devient donc

$$\int_a^b \varphi(x) d\theta(x).$$

Il faut d'abord montrer qu'il a un sens; il suffit pour cela de faire voir que l'expression

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_i |\theta(x_{i+1}) - \theta(x_i)| \\ &= \sum_i \left| \int_{a'}^{b'} \psi(y) d_y [u(x_{i+1}, y) - u(x_i, y)] \right| \end{aligned}$$

reste inférieure à un nombre fixe. Or, laissons fixes les  $x_i$ ;  $\omega$  sera la limite de l'expression (où l'on peut prendre la même division de l'intervalle de variation des  $y$  quel que soit  $i$ )

$$\begin{aligned} & \sum_i \left| \sum_j \psi(\eta_j) \{ [u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j+1})] \right. \\ & \quad \left. - [u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)] \right| \\ & \leq \sum_i \sum_j |\psi(\eta_j)| \left| \overset{(2)}{\Delta}_{i,j} u \right| \\ & \leq [\text{maximum de } |\psi(y)| \text{ dans } a', b'] \times \sum_i \sum_j \left| \overset{(2)}{\Delta}_{i,j} u \right|, \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition, puisque  $u$  est à deuxième variation bornée.

Maintenant démontrons que l'égalité (1) est exacte. D'après le n° 5, on a

$$\int_a^b \varphi(x) d\theta(x) = \sum_i \varphi(\xi_i) [\theta(x_{i+1}) - \theta(x_i)] + R$$

avec  $|R| < 2\omega V_1$ , où  $\omega$  est l'oscillation maximum de  $\varphi(x)$  dans des intervalles de longueurs inférieures à  $\delta$  si tous les intervalles déterminés par  $x_0, x_1, \dots$  sont inférieures à  $\delta$ , et où  $V_1$  est la variation totale de  $\theta(x)$ , laquelle est, d'après ce qui précède, inférieure à  $M'V$ ,  $M'$  étant le maximum de  $\psi$  et  $V$  la variation totale seconde de  $u$ . Alors pour  $\delta < \delta_0$ , on aura  $|R| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Supposons fixés ainsi  $x_0, x_1, \dots$ , et divisons l'intervalle de variation de  $y$  en intervalles  $y_0, \dots, y_j, y_{j+1}, \dots$ , de longueurs inférieures à  $\delta'$ . On a, si  $x_0, x_1, \dots$  restent fixes

$$\begin{aligned} \theta(x_{i+1}) - \theta(x_i) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(y) dy, [u(x_{i+1}, y) - u(x_i, y)] \\ &= \lim_{\delta' \rightarrow 0} \sum_j \psi(\eta_j) [u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j+1}) \\ &\quad - [u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)]] \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_i \varphi(\xi_i) [\theta(x_{i+1}) - \theta(x_i)] = \lim_{\delta' \rightarrow 0} \sum_i \sum_j \varphi(\xi_i) \psi(\eta_j) \frac{\Delta}{\Delta_{i,j}} u.$$

De sorte qu'en prenant  $\delta' < \delta'_0$ , le premier membre différera de moins de  $\frac{\varepsilon}{2}$  de

$$\sum_{i,j} \varphi(\xi_i) \psi(\eta_j) \frac{\Delta}{\Delta_{i,j}} u.$$

Ainsi, pour  $\delta < \delta_0$ ,  $\delta' < \delta'_0$ , on aura

$$\left| \int_a^b \varphi(x) d\theta(x) - \sum_{i,j} \varphi(\xi_i) \psi(\eta_j) \Delta_{i,j}^{(2)} u \right| < \varepsilon.$$

On pourra faire tendre  $\varepsilon$  vers zéro en faisant tendre vers zéro,  $\delta_0$  et  $\delta'_0$ . Mais dans de telles conditions le terme  $\sum_{i,j}$  tend vers le premier membre de (1) et cette égalité (1) se trouve ainsi établie.

En définitive, si  $\varphi(x)$ ,  $\psi(y)$  sont des fonctions continues respectivement dans  $(a, b)$ ,  $(a', b')$  et si  $u(x, y)$  est une fonction à variation deuxième bornée et nulle pour  $x = b$  et pour  $y = b'$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_{a'}^{b'} \varphi(x) \psi(y) d_x d_y u(x, y) \\ &= \int_a^b \varphi(x) d_x \int_{a'}^{b'} \psi(y) d_y u(x, y). \end{aligned}$$

7° *Généralisation du théorème de la moyenne.* — Nous avons déjà obtenu l'inégalité

$$\left| \int_1 f d_n u \right| \leq \mu V.$$

On peut établir une formule plus précise se rapprochant un peu du théorème de la moyenne, quoique notablement plus compliquée. Appelons  $M$ ,  $m$  le maximum et le minimum de  $f$  dans  $T$ ,  $(\Sigma p)$  et  $(-\Sigma n)$  les parties positives et les parties négatives de  $\Sigma \Delta^{(n)} u$ . On a

$$V = \lim v = \lim \left( \sum p + \sum n \right).$$

Au contraire  $\Sigma p - \Sigma n = \Sigma \Delta^{(n)} u$  est constant, c'est-à-dire indépendant du mode de division  $D$  de  $T$ . Soit  $\Delta_0$

sa valeur. On a

$$\begin{aligned} \sum p - \sum n = \Delta_0 \quad \text{d'où} \quad \sum p = \frac{\nu + \Delta_0}{2}, \quad \sum n = \frac{\nu - \Delta_0}{2}. \\ \nu \left( \frac{m - M}{2} \right) + \Delta_0 \frac{M + m}{2} \leq m \sum p - M \sum n \leq \sum f(\xi_1, \dots, \xi_n) \Delta \\ \leq M \sum p - m \sum n = \nu \frac{M - m}{2} + \Delta_0 \frac{M + m}{2}. \end{aligned}$$

Donc à la limite

$$-V \frac{M - m}{2} \leq \int_{\mathbf{T}} f d_n u - \frac{M + m}{2} \Delta_0 = V \frac{M - m}{2}.$$

De sorte qu'en appelant  $\Omega = M - m$  l'oscillation de  $f$  dans  $\mathbf{T}$ , on a

$$\int_{\mathbf{T}} f d_n u = \Delta_0 f(c_1, \dots, c_n) + \theta \frac{V\Omega}{2} \quad \text{avec} \quad -1 < \theta < +1,$$

$(c_1, \dots, c_n)$  étant un certain point de  $\mathbf{T}$  (où  $f = \frac{M + m}{2}$ ).

8° L'intégrale  $\int_{\mathbf{T}} f(x_1, \dots, x_n) d_n u(x_1, \dots, x_n)$  est une fonctionnelle linéaire de  $f(x_1, \dots, x_n)$ . On voit immédiatement d'après ce qui précède que si  $f, g$  sont deux fonctions continues dans  $\mathbf{T}$ , on a

$$\int_{\mathbf{T}} f d_n u \pm \int_{\mathbf{T}} g d_n u = \int_{\mathbf{T}} (f \pm g) d_n u.$$

D'autre part, on a

$$\left| \int_{\mathbf{T}} f d_n u - \int_{\mathbf{T}} f_p d_n u \right| < V [\text{maximum de } |f - f_p| \text{ dans } \mathbf{T}];$$

donc, si  $f_p$  tend *uniformément* vers  $f$ ,

$$\int_{\mathbf{T}} f d_n u = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} f_p d_n u.$$

Autrement dit, si, prenant toujours la même fonction  $u$ , on pose

$$U_f \equiv \int_{\mathbf{T}} f d_n u,$$

$U_f$  est une *fonctionnelle* définie dans le champ des fonctions continues dans  $\mathbf{T}$  et cette fonctionnelle est linéaire, c'est-à-dire : 1° distributive

$$\begin{aligned} U_{f+g} &\equiv U_f + U_g; \\ 2^\circ \text{ continue} \quad U_f &= \lim U_{f_p} \end{aligned}$$

quand  $f_p$  tend uniformément vers  $f$ .

9° *L'intégrale*

$$\int_a^b \cdots \int_a^b \varphi(x_1) \varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n) d_{x_1} \cdots d_{x_n} u(x_1, \dots, x_n).$$

est une *fonctionnelle homogène d'ordre  $n$*  de  $\varphi(x)$ . Si  $u$  est une fonction à variation  $n^{\text{ième}}$  bornée dans le domaine

$$\mathbf{T}_0 \quad a \leq x_i \leq b \quad (i = 1, \dots, n)$$

l'intégrale

$$A_\varphi = \int_a^b \cdots \int_a^b \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) d_{x_1} \cdots d_{x_n} u(x_1, \dots, x_n)$$

a une valeur bien déterminée pour toute fonction  $\varphi(x)$  continue dans  $(a, b)$ . Cette fonctionnelle est continue, c'est-à-dire que si  $\varphi(x)$  tend uniformément vers  $\varphi(x)$ ,  $A_{\varphi_n}$  tend vers  $\varphi$ . Mais de plus elle est homogène et d'ordre  $n$ . Autrement dit, on a

$$A_{\lambda\varphi} = \lambda^n A_\varphi,$$

quelle que soit la constante  $\lambda$ , et

$$\begin{aligned} (1) \quad 0 &\equiv A_{\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n} - \sum A_{\varphi_i + \dots + \varphi_{i_{n-1}}} \\ &\quad + \sum A_{\varphi_i + \dots + \varphi_{i_{n-2}}} - \dots + (-1)^{n-1} \sum A_{\varphi_i} + (-1)^n A_0. \end{aligned}$$



En effet, en posant

$$F_Y \equiv F(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad F_{Y+Y'} = F(y_1 + y'_1, \dots, y_n + y'_n),$$

j'ai montré ailleurs (1) que toute fonction  $F(y_1, \dots, y_n)$ , qui est un polynome de degré  $n$ , vérifie l'identité analogue à (1)

$$(1') \quad 0 \equiv F_{Y^{(1)} + \dots + Y^{(n)}} - \sum F_{Y^{(1)} + \dots + Y^{(n-1)}} \\ + \sum F_{Y^{(1)} + \dots + Y^{(n-2)}} - \dots + (-1)^{n-1} \sum F_{Y^{(1)}} + (-1)^n F_0.$$

Ceci a lieu en particulier pour le polynome

$$F(y_1, \dots, y_n) \equiv y_1 \dots y_n.$$

En remplaçant dans (1')

- $Y^{(k)}$  par  $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}$  et  $y_p^{(k)}$  par  $\varphi_k(x_p)$ ,

puis en multipliant par  $d_n u$  et intégrant, on obtient bien l'identité (1).