NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 130-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__130_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Développement d'une fonction en série trigonométrique.*

I. *En admettant qu'une fonction $y = f(x)$ puisse être représentée par une série trigonométrique, calculer les coefficients de la série.*

Application :

$$(a) \qquad y = x,$$

$$(b) \qquad y = f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t}\,dt.$$

II. *Valabilité et convergence du développement.*

1° *Limite de l'intégrale*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx,$$

quand n augmente indéfiniment.

2° *L'intégrale* $\int_0^b \frac{\sin nx}{x}\,dx$ *est comprise entre* o *et* π

3° *L'intégrale de Dirichlet*

$$J = \int_0^\pi \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

quand n augmente indéfiniment, tend vers $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$.

4° *L'intégrale de Fourier*

$$H = \int_0^\pi f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$$

a pour limite

$$\frac{\pi}{2}[f(+0) + f(+\pi - 0)].$$

5° *La série de Fourier est convergente et a en général pour valeur*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

II. *On donne la surface*

$$x(x^2 + y^2 + z^2) + u(z^2 - y^2) - u^2 x = 0,$$

u désignant une constante donnée. On considère toutes les *droites* Δ *rencontrant les deux droites*

$$D\left\{\begin{array}{l} x = u, \\ z = 0, \end{array}\right. \qquad D_1\left\{\begin{array}{l} x = -u, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

On désignera par $2v$ *l'y du point* A, *par* $2w$ *le* z *du point* B.

1° *Une droite* Δ *ne rencontre la surface qu'en un seul point. Donner les coordonnées de ce point en fonction de* v, w.

2° *On considère la normale à la surface en un point de l'intersection par le plan* $D\Delta$. *Calculer l'angle de cette normale avec le plan.*

3° *Quel résultat peut-on en déduire pour les lignes d'intersection de la surface par les plans* $D\Delta$, *et de même par les plans* $D_1\Delta$?

4° *Montrer que ces lignes d'intersection sont des circonférences.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$p^2y^2 + q^2x^2 - pq\,xyz(px + qy - z) = 0.$$

Démontrer qu'elle admet comme intégrale complète des surfaces du second degré admettant les plans de coordonnées comme plans principaux.

Déterminer les surfaces qui passent par la courbe

$$\frac{\sqrt{3}}{5}z = x^2 - \frac{25}{48},$$

$$y = x^2 - \frac{7}{48}.$$

II. *On donne l'équation*

$$(z + \sin y)z \sin y \cos x\, dx + (z + \sin x)z \sin x \cos y\, dy + (\sin x + \sin y)\sin x \sin y\, dz = 0.$$

Vérifier que c'est une équation aux différentielles totales exacte.

Intégrer l'équation.

(Juillet 1909.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — 1° *Étant donnée la différentielle totale*

$$(2xz^2 + x^2 + yz)\,dx - z(z^2 + x)\,dy + (z^2 y - 2zx^2 - xy)\,dz,$$

on demande de montrer qu'on peut, par un changement de variables convenable, la réduire à une différentielle totale de deux variables seulement et d'effectuer ce calcul. En déduire l'intégrale générale de l'équation obtenue en égalant à zéro cette différentielle.

2° *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$\int \frac{(1 - z + z^2)\,dz}{\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}},$$

prise le long d'un contour fermé simple entourant les trois points 1, 2, 3. *On précisera la détermination qu'on choisira pour le radical.*

3° *Rechercher, en coordonnées cartésiennes, les surfaces telles que leurs deux systèmes de lignes asymptotiques se projettent sur le plan des xy suivant les deux familles de droites et de courbes*

$$y = \text{const.},$$
$$x\,f(y) = \text{const.},$$

où $f(y)$ est une fonction donnée de y.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\cos^2 x + \sin x \cos x + 1}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + 1}\,dx.$$

(Juin 1909.)

Caen.

Épreuve écrite. — I. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles linéaire*

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2,$$

où z désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y.

En supposant que x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires d'un point variable, indiquer le mode de génération des surfaces définies par l'intégrale.

Particulariser la fonction arbitraire qui entre dans l'intégrale de manière que la surface correspondante passe par l'hyperbole

$$x = a,$$
$$z^2 - y^2 = a^2,$$

où a désigne une longueur donnée.

II. *Étant donnés dans un plan deux axes rectangulaires* OX, OY, *on considère la droite variable*

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = f(\alpha),$$

dont le mouvement dépend du paramètre arbitraire α; soit M *le point de contact de cette droite avec son enveloppe.*

Établir l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction $f(\alpha)$ pour que la longueur OM *soit constamment égale au rayon de courbure en* M *de l'enveloppe, et faire voir que son intégration se ramène à des quadratures.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver les intégrales générales du système des équations différentielles*

$$\frac{du}{dx} + 16v - 6u = 48 \cos 2x,$$
$$\frac{dv}{dx} + 2v - u = 6 \cos 2x - 2 \sin 2x,$$

où u, v désignent deux fonctions inconnues de la variable indépendante x. (Novembre 1909.)

Clermont-Ferrand.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Trouver les surfaces telles que le pôle du plan tangent en un point* M *de la surface par rapport à une quadrique donnée soit situé dans le plan passant par* M *et une droite donnée. Cas particulier des* *surfaces de révolution. Trouver parmi ces dernières celles pour lesquelles le rapport des rayons de courbure principaux est constant.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Montrer que, pour que l'équation du troisième degré*

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$$

ait une racine double, il faut en posant

$$\frac{a_0a_2}{a_1^2} = 1 - \frac{1}{h^2}, \qquad \frac{a_1a_3}{a_2^2} = 1 - \frac{1}{h_1^2},$$

que la somme $1 + h + h_1$ *soit nulle pour l'une des quatre déterminations dont elle est susceptible.*

Condition de réalité des racines.

(Juillet 1909.)

Dijon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Intégrer*

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4z}{x - y}.$$

2° *Montrer que les lignes asymptotiques des surfaces intégrales s'obtiennent par quadrature.*

3° *Déterminer toutes les surfaces intégrales admettant une ligne asymptotique qui se projette (parallèlement à* Oz*) sur le plan* xOy *suivant une courbe* (C) *donnée à l'avance.*

Faire explicitement la détermination de ces surfaces et celle de leurs lignes asymptotiques dans le cas où la courbe donnée (C) *a pour équation* $x - y = a$ *(*a *constante donnée).*

4° *Déterminer toutes les surfaces intégrales admettant leur intersection avec le plan* $z = b$ *(*b *constante donnée).*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer par différentiation l'équation différentielle*

$$2y = x\left(y' + \frac{1}{y'}\right) + \frac{y'^3}{3} - y' + 1.$$

Trouver les courbes passant par l'origine. Il y en a une qui en ce point est tangente à Ox. *Elle rencontre* Oy *en un autre point* A. *Calculer la longueur de l'arc* OA *de cette courbe intégrale.*

(Juin 1909.)

Grenoble.

COMPOSITION ÉCRITE. — I. *Condition pour que les courbes* $f(x, y, z) = 0$ *aient un contact du second ordre avec leur enveloppe. Vérifier que les courbes*

$$(y - \alpha^{\sqrt{2}})^2 = 2(1 - \alpha^{\sqrt{2}-1})(2x - \alpha^{\sqrt{2}+1})$$

jouissent de cette propriété.

II. *On transforme homothétiquement une courbe* (S) *définie par* $Y = \varphi(X)$, *par rapport à un point* P *qui décrit une courbe* (S_0), *le rapport* k *d'homothétie variant avec le point* P. *On demande de déterminer* k *en fonction de la variable qui définit le point* P *sur* (S_0) *de façon que les courbes transformées de* (S) *aient un contact du second ordre avec leur enveloppe.*

Application : la courbe (S_0) *a pour équation* $y_0^2 = 2x_0$, *et la courbe* (S), $Y^2 = 4X$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$3(2y - 3z)(8yz - x^2)\,dx + 12x(x^2 + 4z^2)\,dy - 2x(9x^2 + 16y^2)\,dz = 0.$$

(Juillet 1909.)